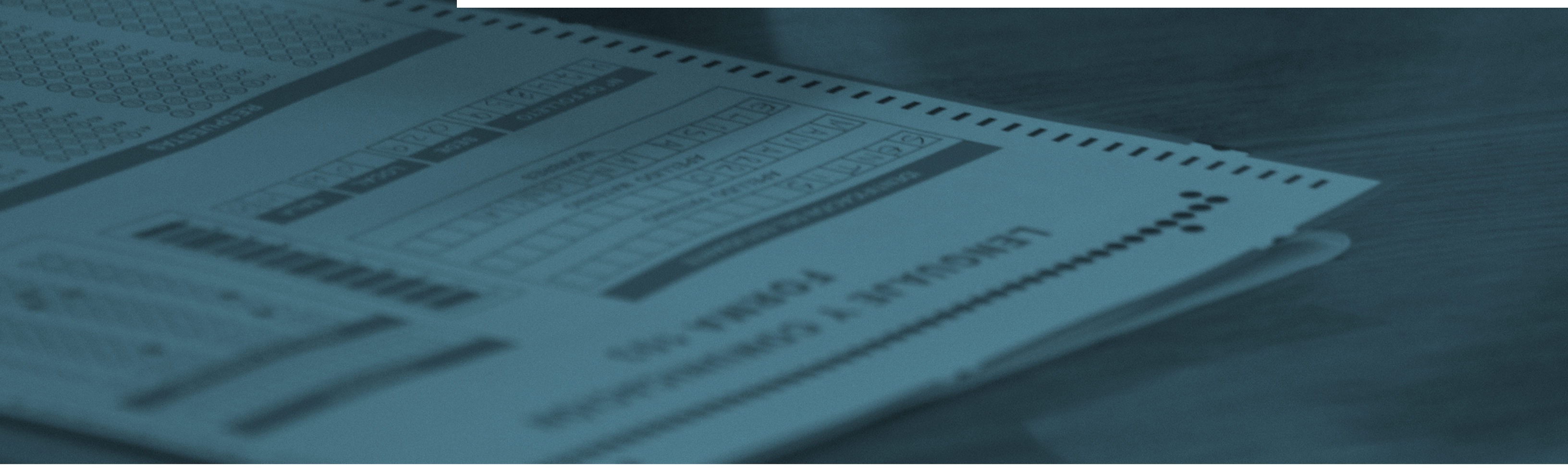
PROCESO de ADMISIÓN 2020

PSU®

Resolución Modelo de Prueba: MATEMÁTICA



DEMRE

PIONEROS • EXPERTOS • CONFIABLES

PREGUNTA 1

$$\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{5}\right):\frac{14}{15} =$$

A) $\dfrac{1}{14}$

B) $\dfrac{45}{56}$

C) $\dfrac{98}{675}$

D) $\dfrac{1}{6}$

E) $\dfrac{7}{10}$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se puede efectuar el siguiente desarrollo:

Aplicando $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad-cb}{bd}$

$$\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{5}\right):\frac{14}{15}$$

$$\left(\frac{25-18}{45}\right):\frac{14}{15}$$

$$\frac{7}{45}:\frac{14}{15}$$

Aplicando $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$

$$\frac{7}{45}\cdot\frac{15}{14}$$

Simplificando

$$\frac{\cancel{7}^{\,1}}{\cancel{45}_{\,3}}\cdot\frac{\cancel{15}^{\,1}}{\cancel{14}_{\,2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

Luego, la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Operaciones con números racionales

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 2

Si $P = 1,\overline{76}$, ¿cuál es el valor de $10P$?

A) $10,\overline{76}$

B) $17,\overline{67}$

C) $17,\overline{76}$

D) $17,\overline{6}$

E) $17,6$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se puede efectuar el siguiente procedimiento.

Se escribe $P = 1{,}76767676\ldots$, luego multiplicando por 10 en ambos lados de la igualdad se tiene:

$$10P = 10 \cdot 1{,}767676767\ldots$$

$$= 17{,}67676767\ldots$$

Aplicando $10\cdot(a{,}bcd)$ = $ab{,}cd$, con a, b, c y d dígitos

$$= 17,\overline{67}$$

Por lo tanto, $10P = 17,\overline{67}$, valor que se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números
Área Temática: Números
Nivel: Primero medio
Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.
Contenido: Operaciones con números racionales
Habilidad Cognitiva: Comprender
Clave: B

PREGUNTA 3

Si $n = 2{,}04$ y $p = 2{,}03$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) n es la aproximación por redondeo a la milésima de $2{,}03851$.

B) n es la aproximación por redondeo a la centésima de $2{,}03851$.

C) p es la aproximación por truncamiento a la milésima de $2{,}03851$.

D) p es la aproximación por redondeo a la centésima de $2{,}03851$.

E) n es la aproximación por truncamiento a la centésima de $2{,}03851$.

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe recordar que:

◊ aproximar por truncamiento un número decimal x a un determinado valor posicional, es escribir x hasta el valor posicional indicado.

◊ aproximar por redondeo un número a un cierto dígito decimal hay que fijarse en el valor del dígito siguiente. Si es mayor o igual a 5, se suma 1 al dígito a redondear, de lo contrario, el dígito se mantiene igual.

De esta manera, se tiene en A) que $2{,}03851$ aproximado por redondeo a la milésima es $2{,}039$, luego $2{,}039 \neq n$, por lo que la afirmación de esta opción es falsa.

La aproximación por redondeo a la centésima de $2{,}03851$ es $2{,}04$, que es igual a n, por lo que la afirmación en B) es verdadera, siendo esta la clave.

La aproximación por truncamiento a la milésima de $2{,}03851$ es $2{,}038$, valor que es distinto de p, luego la afirmación en C) es falsa.

La aproximación por redondeo a la centésima de $2{,}03851$ es $2{,}04$, que es distinto a p, por lo que la afirmación en D) es falsa.

Finalmente, al aproximar por truncamiento a la centésima $2{,}03851$ se obtiene que $2{,}03$, valor que es distinto a n, por lo que la afirmación en E) es falsa.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Aproximación por redondeo o truncamiento de números decimales

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: B

PREGUNTA 4

Catalina, Gabriel y Daniela se repartieron $ 64.800 de tal forma que Catalina recibió $\frac{5}{9}$ del total, Gabriel $\frac{3}{5}$ del dinero sobrante y Daniela el resto. ¿Cuál es la diferencia positiva entre los dineros recibidos por Catalina y Daniela?

A) $ 24.480
B) $ 7.200
C) $ 43.200
D) $ 28.800
E) Ninguno de los valores anteriores

RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta se debe determinar la cantidad de dinero que recibió Catalina y Daniela para luego, calcular la diferencia positiva entre estos valores. Para ello, se realizará el siguiente desarrollo:

- El dinero que recibió Catalina es $\frac{5}{9}$ de $ 64.800, lo que se calcula como:

$$\frac{5}{9} \cdot 64.800 = 36.000$$

  Luego, como Catalina recibió $ 36.000 el dinero sobrante es $ 64.800 – $ 36.000 = $ 28.800.

- El dinero que recibió Gabriel es $\frac{3}{5}$ de $ 28.800, lo que se calcula como:

$$\frac{3}{5} \cdot 28.800 = 17.280$$

  Por lo que Gabriel recibió $ 17.280 y el resto del dinero es $ 28.800 – $ 17.280 = $ 11.520.

- De esta forma, Daniela recibió $ 11.520.

Ahora, la diferencia positiva entre los dineros recibidos por Catalina y Daniela es \$ 36.000 – \$ 11.520 = \$ 24.480, siendo la clave A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Resolución de problemas en contextos diversos que involucran números racionales

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 5

Si a la suma de dos números racionales distintos de cero se le suma la unidad, entonces el resultado es cero. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Si uno de los números es negativo, entonces el otro es positivo.

II) Al sumar los inversos multiplicativos de cada uno de los números, el resultado es un número positivo.

III) La resta de los números es distinta de cero.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y III
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar cuál o cuáles de las afirmaciones presentadas en I), en II y en III) es siempre verdadera. Si se considera p y q como dos números racionales distintos de cero, se interpreta del enunciado que $p + q + 1 = 0$.

La afirmación en I) es falsa, ya que si, por ejemplo, se considera $p = q = -0{,}5$, se tiene que $-0{,}5 + -0{,}5 + 1 = 0$, siendo ambos números negativos.

Recuerde que:

el inverso multiplicativo de un número racional m es $\frac{1}{m}$, donde m es distinto de cero.

En II) se afirma que al sumar los inversos multiplicativos de cada uno de los números, el resultado es un número positivo, esto es falso, pues si se considera, por ejemplo, los números $p = q = -0{,}5$ el inverso multiplicativo es -2, luego $-2 + -2 = -4$.

De la misma forma, si se considera, por ejemplo, $p = q = -0,5$, se tiene que la resta de los números p y q es $p - q = -0,5 - (-0,5) = 0$, luego la afirmación en **III**) es falsa.

De esta manera, se tiene que la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números
Área Temática: Números
Nivel: Primero medio
Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.
Contenido: Resolución de problemas en contextos diversos que involucran números racionales
Habilidad Cognitiva: Aplicar
Clave: E

PREGUNTA 6

Si $2^a \cdot 2^b \cdot 2^c = 256$, ¿cuál es el promedio entre a, b y c?

A) $\frac{256}{3}$

B) $\frac{8}{3}$

C) 128

D) 8

E) Indeterminable con los datos dados

RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta se debe recordar que:

- ◊ sean a un número racional, b y c números enteros, todos distintos de cero.
  - Si $a^b = a^c$, con $a \neq 1$, entonces $b = c$.
  - $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
- ◊ el promedio de n números se calcula dividiendo la suma de los n números por n.

De esta forma, se puede efectuar el siguiente procedimiento:

$$2^a \cdot 2^b \cdot 2^c = 256$$

$$2^{a+b+c} = 2^8$$

Por lo tanto, $a + b + c = 8$, luego el promedio entre a, b y c es $\frac{a+b+c}{3} = \frac{8}{3}$, siendo la clave la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.

Contenido: Potencias de base racional y exponente entero

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 7

Cierto antibiótico tiene el efecto de reducir la población de bacterias en un organismo a la tercera parte cada 2 horas. Si m es la población inicial de bacterias cuando se aplica el antibiótico, ¿qué cantidad de bacterias habrá en el organismo al cabo de n horas, con n un número par distinto de cero?

A) $m - \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5n}$

B) $m - 3^{-n}$

C) $m \cdot 3^{-2n}$

D) $m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

E) $m \cdot 3^{-0,5n}$

RESOLUCIÓN

Para determinar la cantidad de bacterias que habrá en el organismo al cabo de n horas de aplicado el antibiótico, con n un número par distinto de cero, se puede construir una tabla que relacione la cantidad de bacterias que hay en el organismo con la cantidad n de horas transcurridas.

Número de horas	Cantidad de bacterias que queda en el organismo	Para dejar el exponente en función del número de horas se considera lo siguiente	Expresión final
2	$m \cdot \frac{1}{3} = m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1}$	$1 = 0,5 \cdot 2$	$m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5 \cdot 2}$
4	$m \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$	$2 = 0,5 \cdot 4$	$m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5 \cdot 4}$
6	$m \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$	$3 = 0,5 \cdot 6$	$m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5 \cdot 6}$
8	$m \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4}$	$4 = 0,5 \cdot 8$	$m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5 \cdot 8}$
...	....	...	...
n	$m \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \ldots}_{\text{Se multiplica } \frac{n}{2} \text{ veces } \frac{1}{3}}$	$\frac{n}{2} = 0,5 \cdot n$	$m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5 \cdot n}$

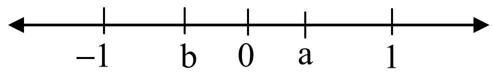
Debido a que $\frac{1}{a} = a^{-1}$ (con $a \neq 0$), la expresión $m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5n}$ se puede escribir como $m \cdot 3^{-0,5n}$, luego la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números
Área Temática: Números
Nivel: Primero medio
Objetivo Fundamental: Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.
Contenido: Problemas de potencias de base racional y exponente entero
Habilidad Cognitiva: Aplicar
Clave: E

PREGUNTA 8

Sean a y b dos números racionales ubicados en la recta numérica, como se muestra en la figura adjunta.



¿Cuál(es) de las siguientes desigualdades es (son) verdadera(s)?

I) $\frac{1}{a} > 1$

II) $a + b < 1$

III) $-a \cdot b > 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para responder la pregunta se debe determinar cuál o cuáles de las desigualdades presentadas en I), en II) y en III) son verdaderas. A partir de la información presentada en la recta numérica del enunciado se obtiene que $-1 < b < 0 < a < 1$.

Ahora, para determinar la veracidad de la afirmación en I) se puede efectuar el siguiente procedimiento:

$$0 < a < 1$$

$$0 < 1 < \frac{1}{a}$$

Multiplicando por $\frac{1}{a}$ en cada término de la desigualdad, con $a > 0$

Luego, la desigualdad en I) es verdadera.

Para determinar si la afirmación en II) es verdadera se puede efectuar el siguiente procedimiento:

Sumando a en cada término de la desigualdad

$$-1 < b < 0$$

$$a - 1 < a + b < a$$

Dado que $a < 1$ se tiene que

$$a + b < a < 1$$

Por lo tanto, $a + b < 1$, luego la desigualdad en II) es verdadera.

La afirmación en III) es verdadera, ya que b es un número negativo y $-a$ es un número negativo, por lo tanto, $-a \cdot b > 0$.

De esta manera, la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Comparación de números racionales en la recta numérica

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: E

PREGUNTA 9

Sean m y n números enteros, se puede determinar que $3^{n^2 - m^2}$ es igual a 81, si se sabe que:

(1) $n - m = 2$

(2) $\dfrac{3^n}{3^{-m}} = 9$

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para dar solución a este ítem de suficiencia de datos se debe determinar si con las informaciones dadas en el enunciado, en (1) y/o en (2) se cumple que $3^{n^2 - m^2} = 81$.

Recuerde que:

- ◊ $p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$
- ◊ $\dfrac{a^c}{a^b} = a^{c - b}$

La expresión $3^{n^2 - m^2}$ se puede expresar como $3^{(n - m)(n + m)}$.

En (1) se plantea que $n - m = 2$, esta información no es suficiente para determinar que se cumple la igualdad planteada en el enunciado, porque faltaría conocer el valor de $n + m$.

En (2) se tiene que $\dfrac{3^n}{3^{-m}} = 9$, además $9 = 3^2$, luego $3^{n + m} = 3^2$, de donde se puede obtener el valor de $n + m$, pero nada se sabe del valor de $n - m$, por lo que con esta afirmación tampoco se puede determinar si se cumple la igualdad planteada en el enunciado.

Ahora, con las informaciones dadas en (1) y en (2) se puede obtener los valores de $(n + m)$ y $(n - m)$, por lo que se puede determinar que se cumple que $3^{n^2 - m^2} = 81$.

De lo anterior, se tiene que C) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.

Contenido: Potencias de base racional y exponente entero

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: C

PREGUNTA 10

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 =$$

A) $10\sqrt{6}$

B) $10 + 4\sqrt{6}$

C) 10

D) 24

E) 12

RESOLUCIÓN

Este ítem se puede resolver de la siguiente manera:

Aplicando $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right) + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2$$

Aplicando $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, con $a > 0$

$$= 5 + 2\sqrt{6} + 2\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right) + 5 - 2\sqrt{6}$$

$$= 10 + 2\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)$$

Aplicando $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$

$$= 10 + 2\sqrt{\left(5+2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5-2\sqrt{6}\right)}$$

Aplicando $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$= 10 + 2\sqrt{5^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2}$$

Aplicando $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, con $a > 0$

$$= 10 + 2\sqrt{25 - 24}$$

$$= 10 + 2\sqrt{1} = 12$$

De lo anterior, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

Contenido: Raíces enésimas

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 11

Si se considera que $\log 2 \approx 0{,}3$ y que $\log 3 \approx 0{,}5$, ¿cuál de los siguientes valores es igual a $\log \sqrt{6}$?

A) $0{,}4$

B) $0{,}65$

C) $0{,}075$

D) $\sqrt{0{,}8}$

E) $\sqrt{0{,}15}$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se pueden utilizar las propiedades de los logaritmos como se muestra en el siguiente desarrollo:

Aplicando $\sqrt[t]{q^r} = q^{\frac{r}{t}}$, con $q > 0$

$$\log \sqrt{6} = \log 6^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando $\log h^q = q \cdot \log h$

$$= \frac{1}{2}\log 6$$

$$= \frac{1}{2}\log(2 \cdot 3)$$

Aplicando $\log(h \cdot q) = \log h + \log q$

$$= \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3)$$

Reemplazando
$\log 2 \approx 0{,}3$ y $\log 3 \approx 0{,}5$

$$= \frac{1}{2}(0{,}3 + 0{,}5)$$

$$= \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4$$

Valor que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

Contenido: Propiedades de los logaritmos

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 12

¿En cuál(es) de las siguientes opciones la expresión puede representar un número racional?

I) $\sqrt{2x}$, siendo x un número entero impar y positivo.

II) $\left(x + \sqrt{2}\right)^2$, siendo x un número racional positivo.

III) $x + \sqrt{2}$, siendo x un número irracional.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe analizar cada una de las expresiones presentadas en I), en II) y en III) y determinar cuál o cuáles de ellas puede representar un número racional.

En I), la expresión $\sqrt{2x}$, con x un número entero impar y positivo se puede escribir como $\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$ y para que esta expresión sea un número racional, $\sqrt{x}$ debe ser de la forma $k\sqrt{2} = \sqrt{k^2 \cdot 2}$, con k un número entero, de donde se tiene que $k^2 \cdot 2$ es un número par, pero x es un número impar, por lo que la expresión en I) no puede representar un número racional.

En II), se debe recordar que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, luego se tiene que

$$\left(x + \sqrt{2}\right)^2 = x^2 + 2x\sqrt{2} + 2 = x^2 + 2 + 2x\sqrt{2}$$

Representa un número racional por ser x un número racional positivo

Representa un número irracional, ya que $2x$ es un número racional y $\sqrt{2}$ es un número irracional

Luego, como la suma de un número racional con un número irracional es un número irracional, se tiene que la expresión en II) no puede representar un número racional.

Por último en III), como x es un número irracional, x puede ser, por ejemplo, $-\sqrt{2}$, por lo que $x + \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$, luego la expresión en III) puede ser un número racional.

De lo anterior, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números
Área Temática: Números
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Comprender que los números irracionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números racionales, y los números reales como aquellos que corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.
Contenido: Número racionales e irracionales
Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar
Clave: C

PREGUNTA 13

En la recta numérica, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto a los números entre $6{,}0$ y $6{,}1$ (sin incluirlos)?

A) Existen infinitos números racionales y existen infinitos números irracionales.
B) Existe solo un número racional y no existen números irracionales.
C) No existen números reales.
D) Existen infinitos números racionales y existe solo un número irracional.
E) Existen infinitos números racionales y no existen números irracionales.

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe recordar que:

entre dos números reales existen infinitos números racionales y existen infinitos números irracionales.

Como los números $6{,}0$ y $6{,}1$ son números reales, la afirmación en A) es verdadera, descartándose las opciones B), C), D) y E).

Por lo que la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números
Área Temática: Números
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Utilizar los números reales en la resolución de problemas, ubicarlos en la recta numérica, demostrar alguna de sus propiedades y realizar aproximaciones.
Contenido: Orden en los números reales en la recta numérica
Habilidad Cognitiva: Comprender
Clave: A

PREGUNTA 14

¿Cuál de los siguientes números es igual al número complejo $\dfrac{(1-i)^9}{(1-i)^7}$?

A) $-2i$

B) 2

C) $\dfrac{1-i}{1+i}$

D) 0

E) $2-2i$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se puede realizar el siguiente desarrollo:

Aplicando $\dfrac{a^c}{a^b} = a^{c-b}$

$$\frac{(1-i)^9}{(1-i)^7} = (1-i)^2$$

Aplicando $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$= 1 - 2i + i^2$$

Aplicando $i^2 = -1$

$$= -2i$$

Luego, la opción A) es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Operatoria con números complejos

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 15

Considere los números complejos $z_1 = a - bi^m$ y $z_2 = a - bi^n$, con a y b números reales distintos de cero, con m y n números enteros mayores o iguales a cero. ¿Con cuál de las siguientes condiciones $(z_1 - z_2)$ es **siempre** igual a cero?

A) $|m - n| = 3$

B) $|m - n| = 2$

C) $m = 2n$

D) $m = 4 + n$

E) $m = 2 + n$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar con cuál de las condiciones presentadas en las opciones se cumple siempre que $z_1 - z_2 = 0$ sabiendo que $z_1 = a - bi^m$ y $z_2 = a - bi^n$, con a y b números reales distintos de cero, m y n números enteros mayores o iguales a cero.

Como $z_1 - z_2 = 0$, se tiene que:

$$z_1 = z_2$$

$$a - bi^m = a - bi^n$$

Sumando $-a$ en ambos lados de la igualdad

$$-bi^m = -bi^n$$

Multiplicando por $-\frac{1}{b}$ en ambos lados de la igualdad

$$i^m = i^n$$

Multiplicando por $\frac{1}{i^n}$ en ambos lados de la igualdad

$$\frac{i^m}{i^n} = 1$$

Aplicando $\frac{a^c}{a^b} = a^{c-b}$

$$i^{m-n} = 1$$

Como $i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = i^{4t} = 1$, con t un número entero mayor o igual que cero, se tiene que $m - n$ es un número múltiplo de 4, en particular $m - n = 4$ expresión que se puede escribir como $m = 4 + n$, igualdad que está en D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Números complejos

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: D

PREGUNTA 16

Considere tres números complejos, cada uno con parte imaginaria distinta de cero. Si la suma de estos tres números es cero, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) La parte real de cada uno de los números complejos es distinta de cero.
II) Uno de estos números complejos es el conjugado de alguno de los otros dos.
III) La suma de los conjugados de estos números complejos es cero.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se deben analizar las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) y determinar cuál o cuáles de ellas es siempre verdadera.

La afirmación en I) no es siempre verdadera, porque en el enunciado se dice que la suma de los tres números complejos es cero y que la parte imaginaria de estos números es distinta de cero, por ejemplo, se puede tener los números complejos con parte real igual a cero $z_1 = i$, $z_2 = 2i$ y $z_3 = -3i$, los que al sumarlos dan como resultado cero.

Recuerde que:

el conjugado del número complejo $z = m + ni$ es $\bar{z} = m - ni$.

La afirmación en II) no es siempre verdadera, porque, por ejemplo, para los números complejos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 2i$ y $z_3 = -3 - 3i$ su suma es cero y ninguno de ellos es el conjugado de alguno de los otros dos.

Ahora, para analizar la afirmación en III) se considerarán los números complejos $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ y $z_3 = p + qi$, con a, b, c, d, p y q números reales, donde b, d y q son distintos de cero.

Del enunciado se tiene que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, reemplazando y desarrollando esta igualdad, se obtiene lo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} a + bi + c + di + p + qi &= 0 \\ (a + c + p) + (b + d + q)i &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Aplicando
$(m + ni) + (r + si) = (m + r) + (n + s)i$

De donde se concluye que $a + c + p = 0$ y que $b + d + q = 0$.

Ahora, como $\overline{z_1} = a - bi$, $\overline{z_2} = c - di$ y $\overline{z_3} = p - qi$, se tiene que su suma es

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = a - bi + c - di + p - qi = \underbrace{(a + c + p)}_{\text{Suma igual a } 0} - \underbrace{(b + d + q)}_{\text{Suma igual a } 0}i$$

Por lo que, la suma de los conjugados de z_1, z_2 y z_3 es cero.

De lo anterior, la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Números complejos

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: B

PREGUNTA 17

Sea el número complejo $z = a + bi$, con a y b números reales distintos de cero, tal que $a > b$. Se puede determinar los valores de a y b, si se sabe que:

(1) $\sqrt{13}$ es el módulo de z.

(2) a y b son números enteros y $a + b = 5$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta al ítem se debe analizar la información dada en el enunciado y verificar si con la información de (1) y/o (2) se pueden determinar los valores de a y b del número complejo $z = a + bi$.

Recuerde que:

el módulo de un número complejo $z = a + bi$, con a y b números reales, es $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Con la información dada en (1) se tiene que el módulo de z es $\sqrt{13}$.

Así, se tiene que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$ y como solo se sabe que a y b son números reales distintos de cero y que $a > b$, entonces existen infinitos valores para a y b que cumplen con la condición, por ejemplo, $a = \sqrt{10}$ y $b = \sqrt{3}$, donde $\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{13}$. Por lo tanto, la información dada en (1) no es suficiente para determinar los valores de a y b.

Por otro lado, en (2) se indica que a y b son números enteros y $a + b = 5$. Con esta información tampoco se puede determinar los valores de a y b, pues solo se sabe que $a > b$, lo que implica que existen infinitos valores para a y b que satisfacen la relación, por ejemplo, $a = 12$ y $b = -7$, donde $12 + (-7) = 5$.

Ahora, si se juntan las informaciones del enunciado, de (1) y de (2) se tiene que $a > b$, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$, a y b son números enteros y $a + b = 5$, luego los únicos valores que cumplen con estas condiciones son $a = 3$ y $b = 2$.

Por lo anterior, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números
Área Temática: Números
Nivel: Tercero medio
Objetivo Fundamental: Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.
Contenido: Módulo de números complejos
Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar
Clave: C

PREGUNTA 18

Si $P = x^2 + 4ax + a^2$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones se puede(n) factorizar como un cuadrado de binomio perfecto?

I) $P + 3x^2$

II) $P - a^2$

III) $P - 6ax$

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y III

D) Solo II y III

E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Una forma de resolver este ítem es operar las expresiones dadas en I), en II) y en III) para determinar cuál de ellas se puede factorizar como un binomio perfecto.

Recuerde que:

$p^2 \pm 2pq + q^2 = (p \pm q)^2$

En I), se puede realizar el siguiente desarrollo:

$$P + 3x^2 = x^2 + 4ax + a^2 + 3x^2 = 4x^2 + 4ax + a^2 = (2x)^2 + 2(2x)a + a^2 = (2x + a)^2$$

Por lo que la expresión en I) se puede factorizar como un cuadrado de binomio perfecto.

En II), se tiene que $P - a^2 = x^2 + 4ax + a^2 - a^2 = x^2 + 4ax$, expresión que no es un trinomio y por lo tanto, no se puede factorizar como un cuadrado de binomio perfecto.

En III), se tiene que $P - 6ax = x^2 + 4ax + a^2 - 6ax = x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$, por lo que la expresión en III) se puede factorizar como un cuadrado de binomio perfecto.

Por el desarrollo anterior, solo las expresiones dadas en I) y en III) se pueden factorizar como binomios al cuadrado perfecto, siendo la clave C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra
Área Temática: Álgebra
Nivel: Primero medio
Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelo de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual o usando herramientas tecnológicas.
Contenido: Factorización de expresiones algebraicas mediante el uso de productos notables
Habilidad Cognitiva: Comprender
Clave: C

PREGUNTA 19

Dada la ecuación en x, $ax + b = c$, con $a > b > c > 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La solución de la ecuación es positiva.
II) La ecuación siempre tiene solución.
III) La solución de la ecuación es menor que 1.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál o cuáles de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) son verdaderas se debe determinar la solución de la ecuación dada en el enunciado, para luego analizar esta solución en función de los valores que puede tener a, b y c.

Así, de la ecuación $ax + b = c$ se despeja x, obteniéndose $x = \dfrac{c - b}{a}$.

Del enunciado se tiene que $a > 0$ y $b > c$, por lo que $0 > c - b$, luego $x = \dfrac{c - b}{a}$ es un valor negativo, por lo que la afirmación en I) es falsa.

Ahora, como $a > 0$ la expresión $\dfrac{c - b}{a}$ siempre es un número real para cualquier valor de a, b y c, por lo tanto, la afirmación en II) es verdadera.

Por último, como $\dfrac{c - b}{a}$ es un valor negativo, entonces la solución de la ecuación es menor que 1, por lo que la afirmación en III) es verdadera.

Por el análisis anterior, la opción correcta es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables, diferenciar entre verificación y demostración de propiedades y analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos, para fundamentar opiniones y tomar decisiones.

Contenido: Ecuaciones literales de primer grado

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: D

PREGUNTA 20

El día lunes un artesano vendió 15 aros y 10 collares, obteniendo $\$ 90.000$ de recaudación entre ellos. El martes el artesano vendió 6 aros y 8 collares, recaudando entre ellos $\$ 60.000$. Si el artesano no cambió los precios de los aros y collares de un día a otro, ¿a qué valor está vendiendo cada collar?

A) $\$ 2.000$

B) $\$ 6.000$

C) $\$ 2.400$

D) $\$ 8.000$

E) $\$ 15.000$

RESOLUCIÓN

Para determinar a qué valor está vendiendo cada collar el artesano, se puede escribir y resolver un sistema de ecuaciones lineales que relaciona la cantidad de aros y la cantidad de collares con la cantidad de dinero que recibe el día lunes y el día martes, sabiendo que no cambió los precios de venta de los artículos.

Se denota por:

x: precio de venta de cada aro

y: precio de venta de cada collar

Así se establece el siguiente sistema:

Venta del día lunes:	Venta del día martes:
$15x + 10y = 90.000$	$6x + 8y = 60.000$

Cantidad de aros | Cantidad de collares | Total del dinero recaudado | Cantidad de aros | Cantidad de collares | Total del dinero recaudado

Este sistema se puede resolver por cualquier método, en este caso se usa el de reducción:

Multiplicando por 2 en ambos lados de la igualdad

Multiplicando por -5 en ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned} 15x + 10y &= 90.000 \\ 6x + 8y &= 60.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30x + 20y &= 180.000 \\ -30x - 40y &= -300.000 \end{aligned}$$

Sumando cada una de los términos de las ecuaciones y despejando y

$$-20y = -120.000$$

$$y = 6.000$$

De esta forma, el artesano vendió cada collar a $\$\ 6.000$, siendo B) la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Contenido: Problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 21

En el sistema de ecuaciones en x e y, $\left.\begin{array}{l} px + qy = p \\ qx + py = q \end{array}\right|$, con p y q números enteros positivos, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $p = q$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

II) Si $p \neq q$, entonces el sistema tiene solución única.

III) El sistema siempre tiene una única solución.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Solo II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem hay que verificar si las afirmaciones en I), en II) y en III) son verdaderas.

Recuerde que:

el sistema $\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}\right|$, en x e y

◊ tiene una única solución cuando $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$.

◊ tiene infinitas soluciones cuando $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$ y $\frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.

◊ no tiene solución cuando $\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$ y $\frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$.

La afirmación en I) es verdadera, pues si $p = q$, se cumple que:

$$\frac{p}{q} = \frac{q}{p} \text{ y } \frac{q}{p} = \frac{p}{q}$$

Por lo tanto, el sistema tiene infinitas soluciones.

En II) se tiene que $p \neq q$, donde p y q son números enteros positivos, luego $p^2 \neq q^2$, lo que se puede escribir como $\frac{p}{q} \neq \frac{q}{p}$, por lo que la afirmación en II) es verdadera.

Por último, la afirmación en III) es falsa, porque existen valores para p y q tal que el sistema no tiene una única solución, por ejemplo, $p = q = 1$.

Por lo tanto, la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra
Área Temática: Álgebra
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Contenido: Criterios de existencia de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas
Habilidad Cognitiva: Comprender
Clave: D

PREGUNTA 22

Si la ecuación en x, $(5x - n)^2 = 0$ tiene como solución $x = 2$, ¿cuál es el valor de n?

A) 10
B) -8
C) 12
D) $\sqrt{96}$
E) $\sqrt{6}$

RESOLUCIÓN

Esta pregunta está asociada a una ecuación de segundo grado donde una de sus soluciones es $x = 2$, por lo que al reemplazar este valor en la ecuación dada en el enunciado se puede encontrar el valor de n pedido.

Así, al reemplazar en la ecuación, se tiene:

$$\begin{aligned}(5\cdot 2 - n)^2 &= 0\\ 5\cdot 2 - n &= 0\\ n &= 10\end{aligned}$$

Valor que se encuentra en A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra
Área Temática: Álgebra
Nivel: Tercero medio
Objetivo Fundamental: Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.
Contenido: Ecuación de segundo grado con una incógnita
Habilidad Cognitiva: Comprender
Clave: A

PREGUNTA 23

La expresión $P - \frac{Q}{R}t^2$ representa el volumen de agua, en m^3, que queda en un pozo en el instante t, en segundos, desde que el pozo está en su máxima capacidad. Si P, Q y R son constantes positivas, ¿cuál de las siguientes expresiones representa la cantidad de segundos que el pozo tarda en quedarse sin agua?

A) $\frac{PR}{Q}$

B) $-\sqrt{\frac{PR}{Q}}$

C) $\sqrt{\frac{PR}{Q}}$

D) $\sqrt{\frac{-PR}{Q}}$

E) $\frac{PQ}{R}$

RESOLUCIÓN

Como la expresión $P - \frac{Q}{R}t^2$ representa el volumen de agua, en m^3, de un pozo en el instante t, se puede deducir que, si x es el tiempo en el que el pozo queda sin agua, entonces se satisface la siguiente igualdad $P - \frac{Q}{R}x^2 = 0$, por lo que el valor de x se puede determinar como se muestra a continuación:

$$P - \frac{Q}{R}x^2 = 0$$

$$-\frac{Q}{R}x^2 = -P$$

$$x^2 = \frac{RP}{Q} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{RP}{Q}}$$

Por lo que la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

Contenido: Problemas asociados a ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 24

Sean a, b, c, d y e números reales, con a y e distintos de cero. Si el número complejo $(d + ei)$ es raíz de la ecuación $ax^2 - bx + c = 1$, en x, ¿cuál de las siguientes desigualdades es **siempre** verdadera?

A) $b^2 - 4ac < -4$

B) $-b^2 - 4ac < 0$

C) $b^2 - 4ac < -4c$

D) $b^2 - 4ac < 4$

E) $b^2 - 4ac < -4a$

RESOLUCIÓN

Esta pregunta está referida a una ecuación cuadrática donde el número complejo $(d + ei)$ es raíz de dicha ecuación.

Recuerde que:

en una ecuación cuadrática de la forma $px^2 + qx + r = 0$, con p, q y r números reales y p distinto de cero, si las soluciones de dicha ecuación son dos números complejos no reales, entonces $q^2 - 4pr < 0$.

Así, de la ecuación $ax^2 - bx + c = 1$ se tiene la igualdad $ax^2 - bx + c - 1 = 0$, donde $p = a$, $q = -b$ y $r = c - 1$, luego al reemplazar en $q^2 - 4pr < 0$ y desarrollando se tiene:

$$(-b)^2 - 4a(c - 1) < 0$$

$$b^2 - 4ac + 4a < 0$$

$$b^2 - 4ac < -4a$$

La desigualdad anterior se encuentra en la opción E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

Contenido: Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: E

PREGUNTA 25

Si $0 < a < b$, ¿cuál es el conjunto solución del sistema $\left.\begin{array}{l} ax + b > 0 \\ a + bx < 0 \end{array}\right|$, en x?

A) $\left[-\dfrac{b}{a}, -\dfrac{a}{b}\right]$

B) $\left]-\dfrac{b}{a}, -\dfrac{a}{b}\right[$

C) $\left]\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}\right[$

D) $\left]\dfrac{b}{a}, \dfrac{a}{b}\right[$

E) $\left[\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{a}\right]$

RESOLUCIÓN

Para determinar el conjunto solución del sistema planteado en el enunciado se debe resolver cada una de las inecuaciones y luego, intersectar los conjuntos solución obtenidos.

De esta manera, para la resolución de ambas inecuaciones hay que considerar que $0 < a < b$, luego:

$$ax + b > 0$$

Sumando $-b$ en ambos lados de la desigualdad

$$ax > -b$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{a}$ en ambos lados de la desigualdad, con $a > 0$

$$x > -\frac{b}{a}$$

$$a + bx < 0$$

Sumando $-a$ en ambos lados de la desigualdad

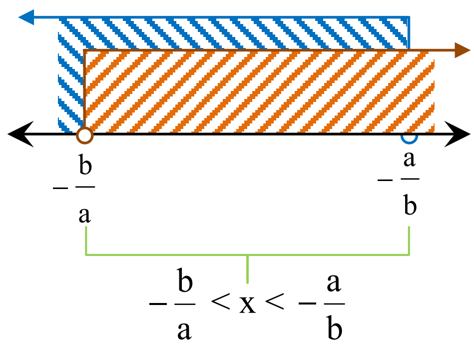
$$bx < -a$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{b}$ en ambos lados de la desigualdad, con $b > 0$

$$x < -\frac{a}{b}$$

Ahora, para determinar la intersección de los conjuntos solución de las inecuaciones se pueden representar estos conjuntos en la recta numérica, teniendo en consideración que si $0 < a < b$, se tiene $-\frac{b}{a} < -\frac{a}{b}$.

$x > -\frac{b}{a}$	$x < -\frac{a}{b}$
	



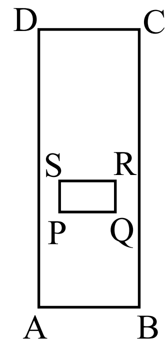
Así, el conjunto solución del sistema está representado en el intervalo $\left]-\frac{b}{a}, -\frac{a}{b}\right[$, el cual se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra
Área Temática: Álgebra
Nivel: Cuarto medio
Objetivo Fundamental: Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.
Contenido: Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita
Habilidad Cognitiva: Aplicar
Clave: B

PREGUNTA 26

La figura adjunta muestra dos rectángulos tal que $\overline{PQ} \mathbin{//} \overline{AB}$, $AD = 10$ cm, $AB = 3$ cm, $PQ = (2x + 1)$ cm y $QR = (x + 3)$ cm.



Si las medidas de los lados del rectángulo PQRS son menores que las medidas de los lados del rectángulo ABCD, ¿cuál de los siguientes conjuntos contiene a todos y únicamente los posibles valores de x?

A) $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$

B) $]-\infty, 7[$

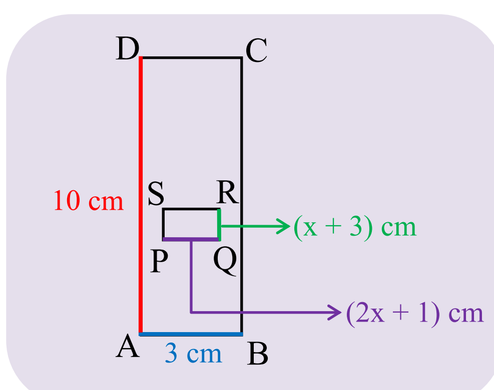
C) $]1, 7[$

D) $]0, 3[$

E) $]-\infty, 1[$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se colocarán los datos dados en el enunciado en la figura adjunta, tal como se muestra a continuación:

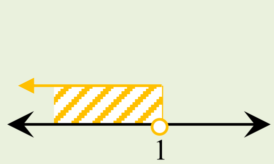
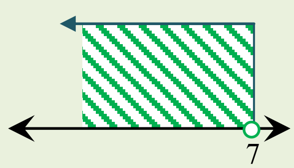


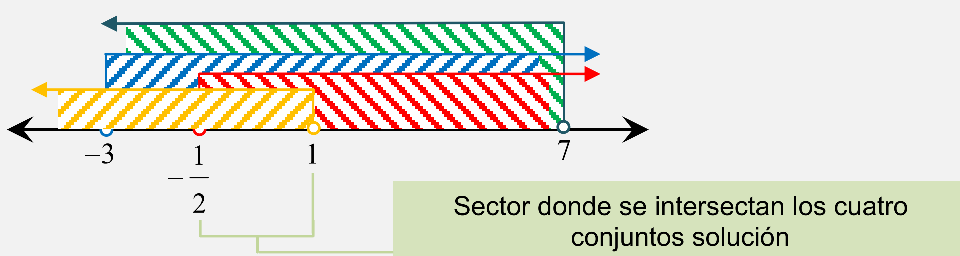
Ahora, en el enunciado se señala que las medidas de los lados del rectángulo $PQRS$ son menores que las medidas de los lados del rectángulo $ABCD$ y como $\overline{PQ} \,//\, \overline{AB}$, se tiene que $PQ < AB$ y que $QR < AD$, por lo que se pueden plantear las inecuaciones $2x + 1 < 3$ y $x + 3 < 10$.

Por otro lado, se debe considerar que $PQ > 0$ y $QR > 0$, ya que las medidas de los lados de un rectángulo deben ser valores positivos, por lo que se pueden plantear las inecuaciones $2x + 1 > 0$ y $x + 3 > 0$.

Así, para resolver el sistema de inecuaciones lineales que contiene las cuatro inecuaciones encontradas se debe resolver cada una de las inecuaciones y luego intersectar los conjuntos solución.

A continuación, se muestra la resolución de las inecuaciones y la representación gráfica en la recta numérica del conjunto solución de cada una de ellas, junto a la intersección de estos conjuntos.

$2x + 1 < 3$ $2x < 2$ $x < 1$	$x + 3 < 10$ $x < 7$	$2x + 1 > 0$ $2x > -1$ $x > -\frac{1}{2}$	$x + 3 > 0$ $x > -3$
			



Como se observa en la figura precedente, el conjunto que contiene a todos y únicamente los posibles valores de x es el intervalo $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$, el cual se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra
Área Temática: Álgebra
Nivel: Cuarto medio
Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia, inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.
Contenido: Problemas que implican sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita
Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar
Clave: A

PREGUNTA 27

Se puede determinar la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 60 cm, si se sabe que:

(1) la medida del lado menor es un tercio de la medida del lado mayor.

(2) el doble, de la medida del lado menor aumentada en $2{,}5$ cm, es igual a la medida del lado mayor, disminuida en $2{,}5$ cm.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Esta pregunta es de suficiencia de datos, por lo que hay que determinar si con la información dada en el enunciado, en (1) y/o en (2) se puede encontrar las medidas de los lados de un rectángulo.

Si se considera x como la medida del lado menor e y como la medida del lado mayor del rectángulo de perímetro 60 cm, se tiene la siguiente ecuación:

$$2x + 2y = 60$$

Ahora, con la información dada en (1) se tiene que la medida del lado menor es un tercio de la medida del lado mayor, es decir:

$$x = \frac{1}{3}y$$

De esta manera, con esta ecuación y la obtenida con los datos del enunciado se puede formar un sistema de ecuaciones lineales, que al resolverlo permite determinar las medidas de los lados del rectángulo.

Por otro lado, con la información dada en (2) se tiene que el doble, de la medida del lado menor aumentada en $2{,}5$ cm, es igual a la medida del lado mayor, disminuido en $2{,}5$ cm, lo que corresponde a la ecuación:

$$2(x + 2{,}5) = y - 2{,}5$$

Al igual que en el caso anterior, con esta ecuación y la obtenida del enunciado se puede determinar las medidas de los lados del rectángulo.

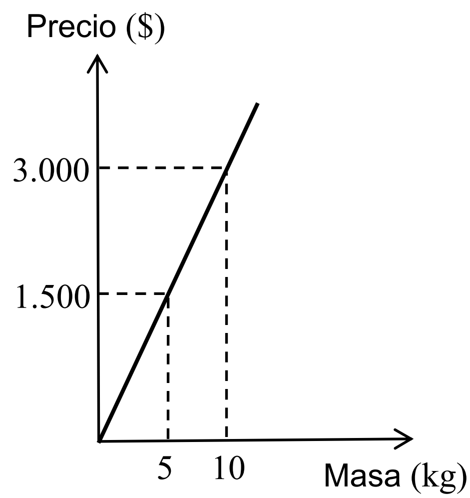
Como con cada una de las informaciones dadas en (1) y en (2) se responde el ítem, se tiene que la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra
Área Temática: Álgebra
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Contenido: Problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas
Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar
Clave: D

PREGUNTA 28

La recta de la figura adjunta modela el precio del azúcar en función de la masa del azúcar. El precio de 2 kg de azúcar es igual al de 3 kg de harina.



Si la relación entre el precio de la harina y su masa se modela por una función lineal, ¿cuál de las siguientes funciones permite determinar el precio de x kg de harina?

A) $f(x) = 100x$

B) $g(x) = 500x$

C) $h(x) = 200x$

D) $m(x) = 300x$

E) $j(x) = 450x$

RESOLUCIÓN

Para determinar la función lineal que modela el precio de x kg de harina, se debe tener presente que:

◊ una función lineal es de la forma $p(x) = mx$ y su gráfica es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano cuya pendiente es m.

◊ la pendiente de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Del gráfico se obtienen los puntos $(5, 1.500)$ y $(10, 3.000)$, luego la pendiente de la recta que pasa por estos puntos es:

$$m = \frac{3.000 - 1.500}{10 - 5} = \frac{1.500}{5} = 300$$

Por lo que la función asociada a la recta es $r(x) = 300x$, donde x es la masa en kg del azúcar, luego 2 kg de azúcar tiene un precio de $r(2) = 600$.

Ahora, como el precio de 2 kg de azúcar es igual al de 3 kg de harina, se tiene que 3 kg de harina tiene un precio de \$ 600, es decir, 1 kg de harina tiene un precio de \$ 200.

Como el precio de la harina y su masa se modela por un función lineal se tiene que la función $h(x) = 200x$ permite determinar el precio de x kg de harina, función que se encuentra en C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra
Área Temática: Funciones
Nivel: Primero medio
Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.
Contenido: Función lineal
Habilidad Cognitiva: Aplicar
Clave: C

PREGUNTA 29

Una empresa de mantención de equipos eléctricos cobra un costo fijo mensual de \$ 200.000 y \$ 5.000 por cada visita que su técnico realice en el mes. Si una fábrica contrata los servicios de esta empresa, ¿cuál de las siguientes funciones modela el cobro total, en pesos, del servicio para x visitas en el mes?

A) $f(x) = 205.000x$

B) $g(x) = 200.000 - 5.000x$

C) $h(x) = 200.000x + 5.000$

D) $p(x) = 5.000x + 200.000$

E) $q(x) = 5.000x - 200.000$

RESOLUCIÓN

Para determinar la función que modela el cobro total que hace una empresa por la mantención de equipos eléctricos en el mes, se debe considerar que este se realiza en base a un costo fijo mensual (\$ 200.000) más un cobro por cada visita (\$ 5.000) que realiza el técnico al mes.

Así, como x es la cantidad de visitas que realiza el técnico en el mes se tiene que la función pedida es de la forma $r(x) = 200.000 + 5.000x$, función que se encuentra en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Función afín

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

PREGUNTA 30

Sean f y h funciones, ambas con dominio el conjunto $]0, \infty[$, definidas por $f(x) = 3\log x$ y por $h(x) = \log x + 3$ y sea la función g, con dominio el conjunto $]-3, \infty[$, definida por $g(x) = \log(x + 3)$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Las gráficas de f, h y g intersectan en puntos distintos al eje x.

II) De las gráficas de las tres funciones solo la gráfica de g intersecta al eje y.

III) Si $x = 1$, entonces $f(x) < h(x) = g(x)$.

A) Solo II

B) Solo III

C) Solo I y II

D) Solo II y III

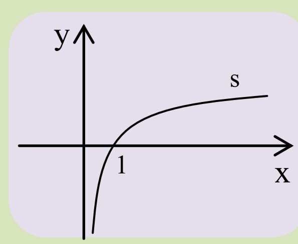
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe analizar las afirmaciones en I), en II) y en III) y determinar cuál o cuáles de ellas es verdadera. Para ello se graficará las tres funciones dadas en el enunciado en un mismo plano cartesiano.

Recuerde que:

◊ la gráfica de la función logarítmica $s(x) = \log x$, con dominio el conjunto de los números reales positivos, es:



◊ la gráfica de la función $q(x) = s(x) + m$, con m un número real positivo, corresponde a la gráfica de la función s trasladada m unidades verticalmente hacia arriba.

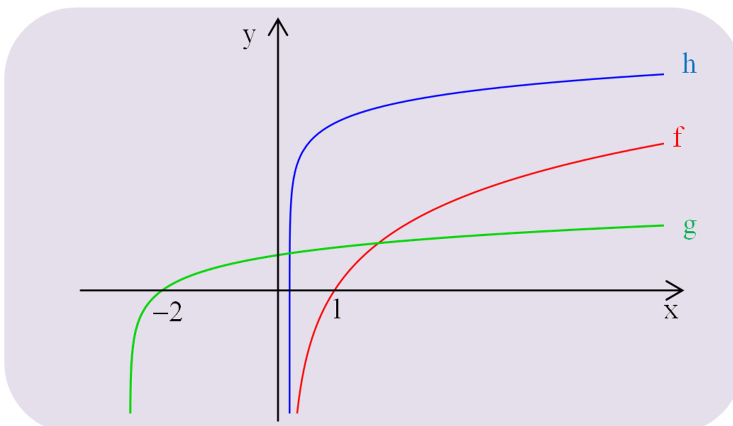
◊ la gráfica de la función $r(x) = s(x + n)$, con n un número real positivo, corresponde a la gráfica de la función s trasladada n unidades horizontalmente hacia la izquierda.

◊ la gráfica de la función $p(x) = k\cdot s(x)$, con k un número real mayor que 1, está formada por los puntos de la forma $(x, k\cdot s(x))$.

Por lo anterior, se tiene que:

- la gráfica de la función $f(x) = 3\log x$ es una función donde cada punto es de la forma $(x, 3\cdot\log x)$.
- la gráfica de la función $h(x) = \log x + 3$ es una función trasladada 3 unidades verticalmente hacia arriba de la función $s(x) = \log x$.
- la gráfica de la función $g(x) = \log(x + 3)$ es una función trasladada 3 unidades horizontalmente hacia la izquierda de la función $s(x) = \log x$.

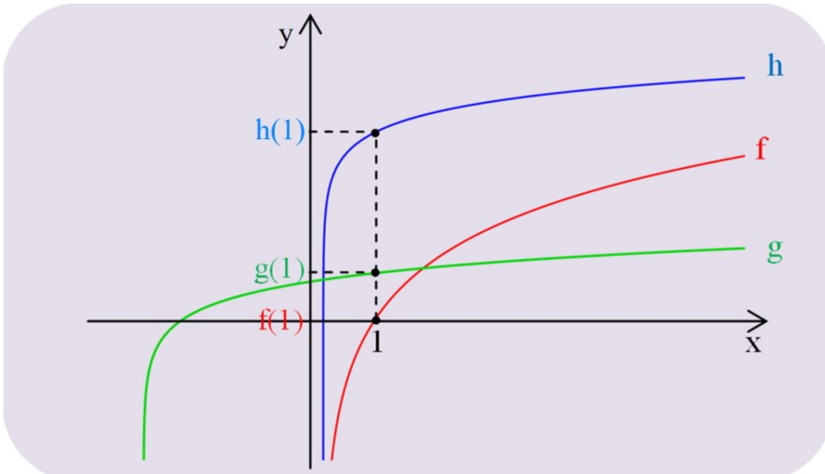
En la siguiente figura se muestra la gráfica de estas funciones:



En I) se plantea que las gráficas de las tres funciones intersectan en puntos distintos al eje x, lo cual es verdadero, ya que como se muestra en la figura anterior la gráfica de f intersecta al eje x en el punto $(1, 0)$, la gráfica de h lo hace en un punto que tiene abscisa un valor que está entre 0 y 1, y la gráfica de g lo hace en el punto $(-2, 0)$.

La afirmación dada en II) también es verdadera, pues como se observa en la figura solo la gráfica de g intersecta al eje y, las gráficas de las otras dos funciones se acercan a este eje pero nunca lo intersectan, ya que el 0 no pertenece al dominio de las funciones f y h.

Ahora, en III) se tiene que si $x = 1$, entonces $f(x) < h(x) = g(x)$, afirmación que es falsa, porque $f(1) < g(1) < h(1)$, como se muestra en la siguiente figura:



Como solo las afirmaciones en I) y en II) son verdaderas, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Utilizar las funciones exponencial, logarítmica y raíz cuadrada como modelos de situaciones o fenómenos en contextos significativos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Función logarítmica

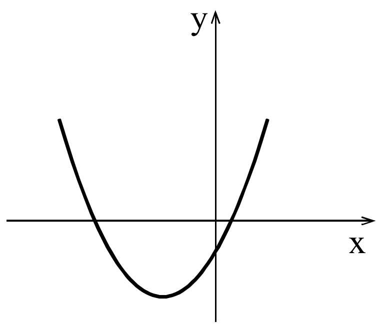
Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: C

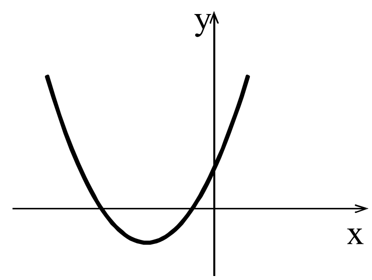
PREGUNTA 31

Considere la función f cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = ax^2 + 5x + 3c$, con $a > 0$ y $ac = -8$. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la gráfica de f?

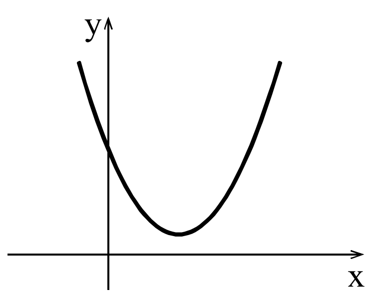
A)



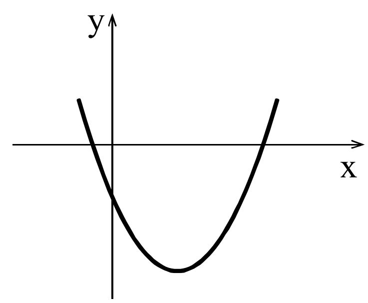
B)



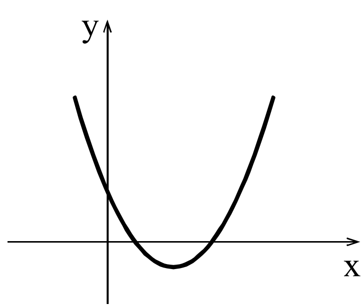
C)



D)



E)

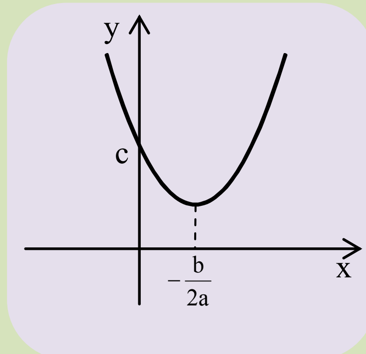


RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de los gráficos representa mejor la función f se debe considerar lo siguiente.

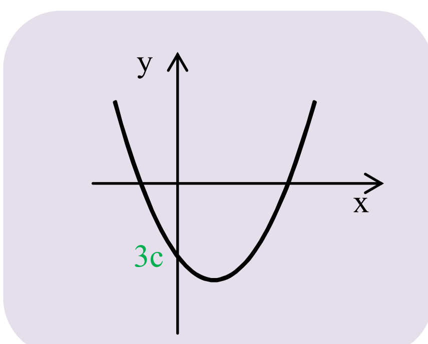
La gráfica de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, es una parábola, donde se tiene que:

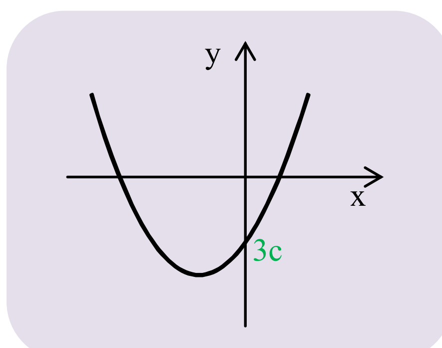
- ◊ si $a > 0$, entonces la parábola asociada a f es cóncava hacia arriba.
- ◊ la parábola intersecta al eje de las ordenadas en el punto $(0, c)$.
- ◊ la abscisa del vértice de la parábola es $-\dfrac{b}{2a}$.



Así, como en el enunciado se plantea que la función f está definida por $f(x) = ax^2 + 5x + 3c$, con $a > 0$, se tiene que su gráfica es una parábola cóncava hacia arriba.

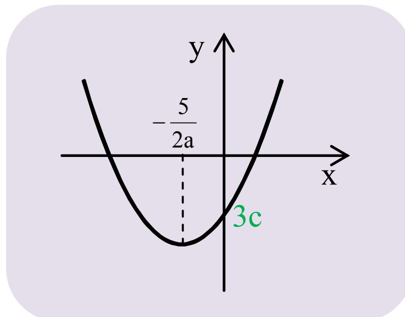
Ahora, como $ac = -8$ y $a > 0$, se tiene que $c < 0$, por lo tanto, la parábola asociada a f intersecta al eje y en el punto $\mathbf{(0, 3c)}$, con $3c$ un valor negativo, tal como se muestra en las siguientes figuras:





Por lo anterior, se descartan los gráficos que están en las opciones B), C) y E).

Por otro lado, se tiene que la abscisa del vértice de la parábola asociada a f es $-\frac{5}{2a}$, valor que es negativo, pues $a > 0$, lo que implica que el vértice se ubica en el tercer cuadrante del plano cartesiano, como se muestra a continuación:



Luego, la clave se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra
Área Temática: Funciones
Nivel: Tercero medio
Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.
Contenido: Función cuadrática
Habilidad Cognitiva: Comprender
Clave: A

PREGUNTA 32

¿Cuál(es) de las siguientes relaciones se puede(n) modelar mediante una función cuadrática?

I) El volumen de los cilindros de radio basal 5 cm en función de su altura x.

II) La medida de un lado de los rectángulos de área 36 unidades cuadradas en función de la medida del otro lado x.

III) La medida de la diagonal de los cuadrados en función de su lado x.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) Solo I y II

E) Ninguna de ellas

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál o cuáles de las relaciones dadas en I), en II) y en III) se modela mediante una función cuadrática se debe considerar que:

una función cuadrática es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$.

En I), para determinar la función f que modela el volumen de los cilindros, en función de su altura, se debe tener presente que:

el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio basal y h su altura.

Como $r = 5\text{ cm}$ y $h = x$, se tiene que $f(x) = 25\pi x$, la cual es una función lineal.

En II) se debe encontrar la función g que modela la medida de un lado de los rectángulos de área 36 unidades cuadradas, en función de la medida del otro lado.

El área de un rectángulo es el producto de las medidas de dos de sus lados consecutivos. Si se denota como x la medida de un lado del rectángulo y $g(x)$ la medida del otro lado, se tiene que $g(x) \cdot x = 36$, de donde se obtiene que $g(x) = \frac{36}{x}$, la cual no es una función cuadrática.

Por último, en III) se debe modelar la función h que representa la medida de la diagonal de los cuadrados en función de su lado.

Recuerde que:

la diagonal de un cuadrado es $d = a\sqrt{2}$, donde a es la medida de su lado.

Así, la función respectiva es $h(x) = x\sqrt{2}$, que tampoco es cuadrática.

Como las tres funciones que modelan las relaciones en I), en II) y en III) no son cuadráticas, se tiene que la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra
Área Temática: Funciones
Nivel: Tercero medio
Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.
Contenido: Modelamiento de situaciones a través de funciones cuadráticas
Habilidad Cognitiva: Comprender
Clave: E

PREGUNTA 33

Sea f una función, cuyo dominio es $\mathrm{IR} - \{-5\}$, definida por $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 5}$. ¿Cuál de las siguientes funciones corresponde a su inversa?

A) $g(x) = \dfrac{x + 5}{2x - 3}$, con dominio $\mathrm{IR} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

B) $h(x) = \dfrac{5x + 3}{2 - x}$, con dominio $\mathrm{IR} - \{2\}$

C) $r(x) = \dfrac{8}{2 - x}$, con dominio $\mathrm{IR} - \{2\}$

D) $s(x) = \dfrac{x + 5}{2x - 3}$, con dominio $\mathrm{IR} - \left\{\dfrac{3}{2}, -5\right\}$

E) $t(x) = \dfrac{5x + 3}{2 - x}$, con dominio $\mathrm{IR} - \{2, -5\}$

RESOLUCIÓN

En este ítem se debe determinar la expresión que representa a la función inversa de f y el dominio de la función obtenida.

Recuerde que:

se llama función inversa de una función g a una nueva función cuyo dominio es el conjunto de las imágenes de la función g y sus imágenes conforman el dominio de la función g, es decir, si la función g^{-1} es la función inversa de g y $g(b) = a$, entonces $g^{-1}(a) = b$.

Para determinar la expresión que representa a la función inversa de f se considerará que $y = f(x)$, así $y = \dfrac{2x - 3}{x + 5}$, de donde se despejará la variable x como se muestra a continuación:

$$y = \frac{2x - 3}{x + 5}$$

Multiplicando por $x + 5$ a ambos lados de la igualdad

$$y(x + 5) = 2x - 3$$

Aplicando $a(b + c) = ab + ac$

$$xy + 5y = 2x - 3$$

Sumando $-2x$ y $-5y$ a ambos lados de la igualdad

$$xy - 2x = -5y - 3$$

Aplicando $ab + ac = a(b + c)$

$$x(y - 2) = -5y - 3$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{y - 2}$ a ambos lados de la igualdad

$$x = \frac{-5y - 3}{y - 2}$$

Factorizando por -1 en el numerador y en el denominador para luego simplificar

$$x = \frac{5y + 3}{2 - y}$$

Luego, la función inversa de f es $h(x) = \dfrac{5x + 3}{2 - x}$ y para determinar su dominio, el denominador de la fracción debe ser distinto de cero, es decir, $2 - x \neq 0$, por lo que $x \neq 2$, así, el dominio de h es $\mathrm{IR} - \{2\}$. De esta manera la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa.

Contenido: Función inversa

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 34

Una persona paga en un año \$ 48.000 de interés por un préstamo conseguido al 5% de interés compuesto anual. Otra persona paga el mismo monto, habiendo conseguido un préstamo al 4% de interés compuesto anual. ¿Cuál de los siguientes valores es la diferencia entre los préstamos obtenidos por ambas personas?

A) \$ 38.400

B) \$ 60.000

C) \$ 576.000

D) \$ 480.000

E) \$ 240.000

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe aplicar la fórmula de cálculo de interés compuesto.

Recuerde que:

la fórmula para el cálculo del interés compuesto es $C_f = C_i(1 + t)^n$

donde: C_f = capital final C_i = capital inicial t = tasa de interés n = periodos

Ahora, del enunciado se tiene que una persona pidió un préstamo a una tasa de interés compuesta anual del 5%, otra persona pidió un préstamo a una tasa de interés compuesta anual del 4% y cada persona paga en un año \$ 48.000 de interés. De esta manera, para estas personas su deuda total (C_f) es igual al préstamo solicitado (C_i) más el interés (\$ 48.000).

Así, para el préstamo solicitado por la primera persona se tiene que; $C_f = C_i + 48.000$, $t = 0,05$ y $n = 1$.

Reemplazando estos valores en la fórmula de interés compuesto se obtiene que:

$$C_i + 48.000 = C_i(1,05)^1$$

$$48.000 = 0,05\ C_i$$

$$960.000 = C_i$$

De la misma manera se calcula el capital inicial de la otra persona obteniéndose que este es de $\$ 1.200.000$.

Luego, la diferencia de los créditos es $\$ 1.200.000 - \$ 960.000 = \$ 240.000$, valor que se encuentra en la opción E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra y Funciones

Área Temática: Funciones

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia, inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.

Contenido: Interés compuesto

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 35

Sea f una función, con dominio el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = (x - 5)^3 + 3$. Si g, h, k, m y n son funciones, todas con dominio el conjunto de los números reales, ¿con cuál de las siguientes traslaciones se obtiene la gráfica de f ?

A) Trasladar la gráfica de $g(x) = x^3 + 3$, cinco unidades horizontalmente hacia la izquierda.

B) Trasladar la gráfica de $h(x) = (x - 2)^3 + 3$, tres unidades horizontalmente hacia la izquierda.

C) Trasladar la gráfica de $m(x) = x^3$, cinco unidades horizontalmente hacia la izquierda y tres unidades verticalmente hacia arriba.

D) Trasladar la gráfica de $k(x) = (x - 5)^3 - 1$, cuatro unidades verticalmente hacia arriba.

E) Trasladar la gráfica de $n(x) = x^3 - 5$, tres unidades verticalmente hacia arriba.

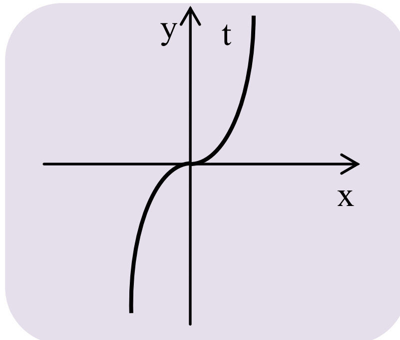
RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem de traslación de gráficas de funciones se debe analizar cada una de las gráficas de las funciones dadas en las opciones para así determinar con cuál de ellas se obtiene la gráfica de f.

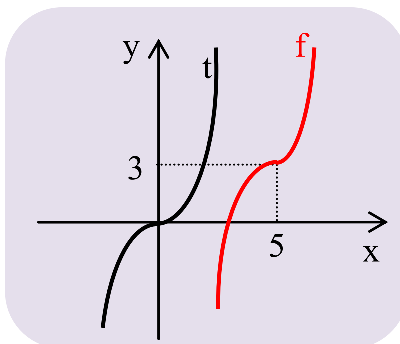
En el siguiente recuadro se muestra las funciones asociadas a las traslaciones de la gráfica de f.

Traslación de la gráfica de f, con $c > 0$	**Funciones**
Se traslada en forma horizontal c unidades hacia la izquierda	$f(x + c)$
Se traslada en forma horizontal c unidades hacia la derecha	$f(x - c)$
Se traslada en forma vertical c unidades hacia arriba	$f(x) + c$
Se traslada en forma vertical c unidades hacia abajo	$f(x) - c$

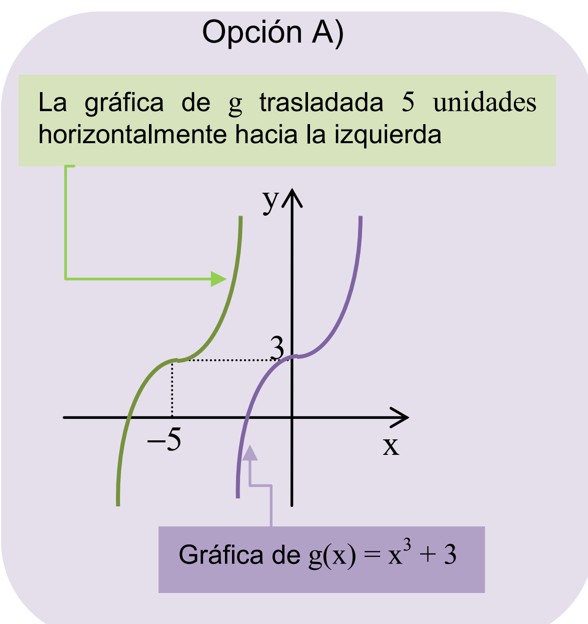
Ahora, la gráfica de la función $t(x) = x^3$, con dominio el conjunto de los números reales es:

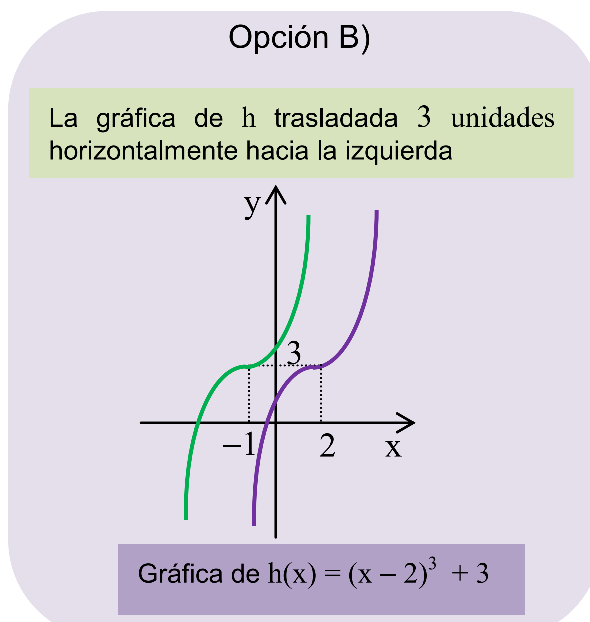


Así, la gráfica de $f(x) = (x - 5)^3 + 3$ corresponde a la gráfica de t trasladada horizontalmente 5 unidades a la derecha y 3 unidades en forma vertical hacia arriba.



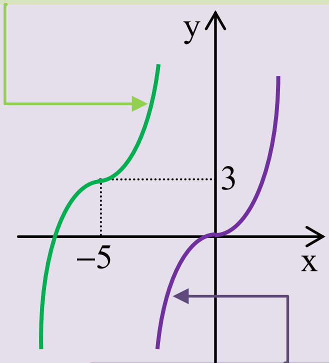
A continuación se representan las gráficas de las funciones de cada una de las opciones con sus respectivas traslaciones:





Opción C)

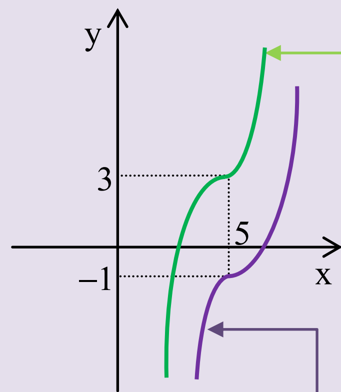
La gráfica de m trasladada 5 unidades horizontalmente hacia la izquierda y 3 unidades verticalmente hacia arriba



Gráfica de $m(x) = x^3$

Opción D)

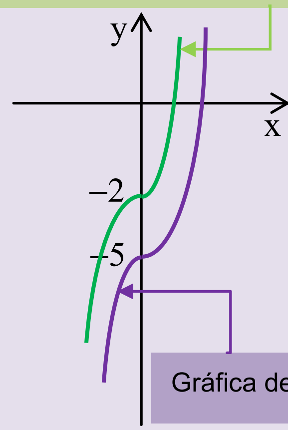
La gráfica de k trasladada 4 unidades verticalmente hacia arriba



Gráfica de $k(x) = (x - 5)^3 - 1$

Opción E)

La gráfica de n trasladada 3 unidades verticalmente hacia arriba



Gráfica de $n(x) = x^3 - 5$

Luego, la gráfica trasladada de la función k de la opción D) corresponde a la gráfica de f.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia, inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.

Contenido: Función potencia

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: D

PREGUNTA 36

Sea la función $f(x) = \sqrt{px - 6}$, cuyo dominio es $\left[\frac{6}{p}, \infty\right[$, con $p > 0$. Se puede determinar el valor de la constante p, si se sabe que:

(1) $f(2.010) = 2$

(2) la gráfica de f intersecta al eje x en el punto $(1.206, 0)$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para resolver esta pregunta hay que verificar si se puede determinar el valor de p con la información disponible en (1) y/o en (2).

En (1), se tiene que $f(2.010) = 2$, al reemplazar en la función del enunciado se tiene:

$$f(2.010) = \sqrt{2.010p - 6} = 2$$

Desarrollando la ecuación anterior se puede determinar el valor de p, luego la información en (1) es suficiente para resolver el problema.

En (2), se dice que el punto de intersección de la gráfica de f con el eje x es $(1.206, 0)$, es decir, $f(1.206) = 0$. Reemplazando en la función del enunciado se obtiene la ecuación:

$$\sqrt{1.206p - 6} = 0$$

Desarrollando la ecuación anterior, se puede determinar el valor de p, luego la información en (2) es suficiente para resolver el problema. Así, la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Utilizar las funciones exponencial, logarítmica y raíz cuadrada como modelos de situaciones o fenómenos en contextos significativos y representarlas gráficamente en forma manual.

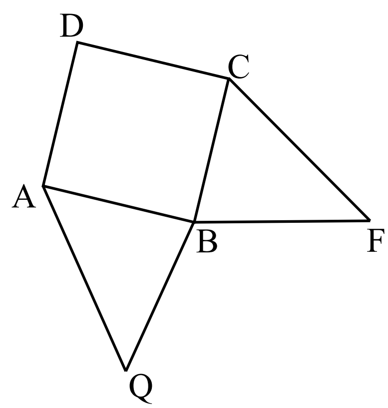
Contenido: Función raíz cuadrada

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar, evaluar

Clave: D

PREGUNTA 37

En la figura adjunta ABCD es un cuadrado, AQ = CF, $\measuredangle$ QAB = $\measuredangle$ FCB = 70° y $\measuredangle$ QBF = 3 · $\measuredangle$ CBF.



¿Cuánto mide el $\measuredangle$ AQB?

A) 54°

B) 56°

C) 40°

D) 67,5°

E) 42,5°

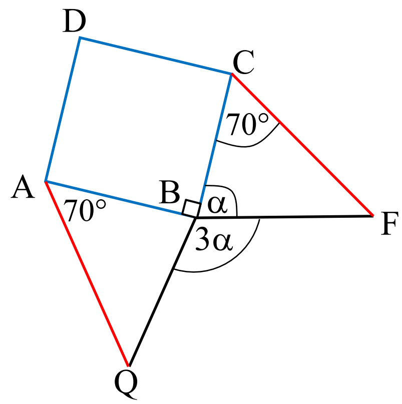
RESOLUCIÓN

Para determinar la medida del $\measuredangle$ AQB se analizarán las relaciones que existen entre las medidas de los lados y de los ángulos de la figura dada.

Recuerde que:

dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales la medida de dos lados y el ángulo entre ellos (criterio LAL).

Si se designa la medida del $\sphericalangle$ CBF por α y considerando la información del enunciado se tiene:



Así, los triángulos ABQ y CBF son congruentes por criterio LAL, por lo que $\sphericalangle$ QBA = α. Luego, de la figura se obtiene:

$$\alpha + 3\alpha + \alpha + 90° = 360°$$
$$5\alpha + 90° = 360°$$
$$5\alpha = 270°$$
$$\alpha = 54°$$

Ahora, para calcular la medida del $\sphericalangle$ AQB se realiza lo siguiente:

$$\sphericalangle AQB + 70° + 54° = 180°$$
$$\sphericalangle AQB + 124° = 180°$$
$$\sphericalangle AQB = 56°$$

Por lo tanto, la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría proporcional

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Conocer y utilizar conceptos y propiedades asociados al estudio de la congruencia de figuras planas, para resolver problemas y demostrar propiedades.

Contenido: Congruencia de triángulos

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 38

¿Cuál de los siguientes puntos del plano cartesiano está más distante del punto $(2, 3)$?

A) $(-1, 3)$

B) $(4, 5)$

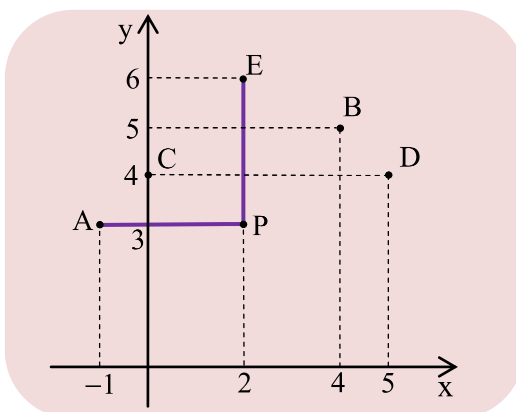
C) $(0, 4)$

D) $(5, 4)$

E) $(2, 6)$

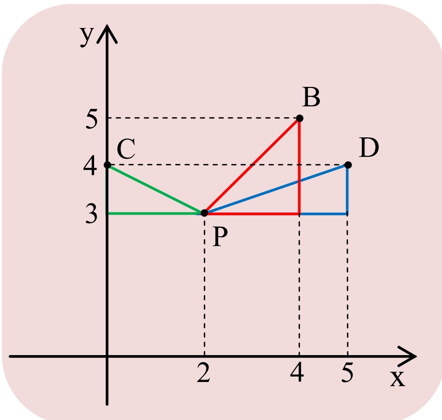
RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se pueden graficar los puntos dados en A), B), C), D) y E), los cuales se identificarán en el gráfico como A, B, C, D y E, respectivamente. El punto $(2, 3)$ se identificará como P, tal como se muestra a continuación:



Del gráfico se observa que $AP = PE = 3$.

Ahora, para determinar la distancia entre P y los puntos B, C y D se dibujarán triángulos rectángulos, tal como se muestra a continuación:



Del gráfico se observa que:

- $PC = \sqrt{5}$, pues corresponde a la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de medidas 1 y 2.
- $PB = \sqrt{8}$, pues corresponde a la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de medidas 2 y 2.
- $PD = \sqrt{10}$, pues corresponde a la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de medidas 3 y 1.

Por lo anterior, se tiene que el punto D es el que está más distante de P, por lo que la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

Contenido: Representación de puntos en el plano cartesiano

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

PREGUNTA 39

Considere los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = (-4, -1)$ y $2\vec{u} - \vec{v} = (10, -11)$. ¿Cuál de las siguientes coordenadas corresponde a $\vec{v}$?

A) $(2, -4)$

B) $(-6, 3)$

C) $(6, -12)$

D) $\left(-\dfrac{26}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

E) $\left(-9, \dfrac{9}{2}\right)$

RESOLUCIÓN

Para dar respuesta a este ítem recuerde que:

dado los vectores $\vec{r}(e, f)$ y $\vec{w}(g, h)$, se cumple que:

- ◊ $\vec{r} + \vec{w} = (e, f) + (g, h) = (e + g, f + h)$
- ◊ $\vec{r} - \vec{w} = (e, f) + (-g, -h) = (e - g, f - h)$
- ◊ $k\vec{r} = k(e, f) = (ke, kf)$, con k un número real
- ◊ si $\vec{r}(e, f) = \vec{w}(g, h)$, entonces $e = g$ y $f = h$

Se designará por (a, b) y por (c, d) a las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, respectivamente.

Del enunciado se tiene:

$\vec{u} + \vec{v} = (-4, -1)$	$2\vec{u} - \vec{v} = (10, -11)$
$(a, b) + (c, d) = (-4, -1)$ $(a + c, b + d) = (-4, -1)$ $a + c = -4$ y $b + d = -1$	$(2a, 2b) - (c, d) = (10, -11)$ $(2a - c, 2b - d) = (10, -11)$ $2a - c = 10$ y $2b - d = -11$

Como se pide determinar las coordenadas de $\vec{v}$, se debe encontrar los valores de c y d.

Del sistema $\left.\begin{array}{l} a + c = -4 \\ 2a - c = 10 \end{array}\right|$ se determina el valor c y del sistema $\left.\begin{array}{l} b + d = -1 \\ 2b - d = -11 \end{array}\right|$ se determina el valor de d, tal como se muestra a continuación:

Despejando a de la primera ecuación y reemplazando en la segunda ecuación

$$\left.\begin{array}{l} a + c = -4 \\ 2a - c = 10 \end{array}\right| \longrightarrow a = -c - 4$$

Aplicando $r(f + s) = rf + rs$

$$\begin{aligned} 2(-c - 4) - c &= 10 \\ -2c - 8 - c &= 10 \\ -3c &= 18 \\ c &= -6 \end{aligned}$$

De la misma manera se puede determinar que el valor de d es 3. Así, las coordenadas de $\vec{v}$ son $(-6, 3)$, las que se encuentran en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

Contenido: Operaciones con vectores

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 40

Un vértice de un rombo de perímetro 20 unidades, está en $A(4, 3)$. Si se sabe que, exactamente, dos vértices del rombo tienen abscisa negativa y uno de estos dos tiene la ordenada igual a la ordenada del punto A, ¿cuál de las siguientes coordenadas corresponde a uno de los vértices mencionados?

A) $(-4, 3)$

B) $(-2, 3)$

C) $(4, -3)$

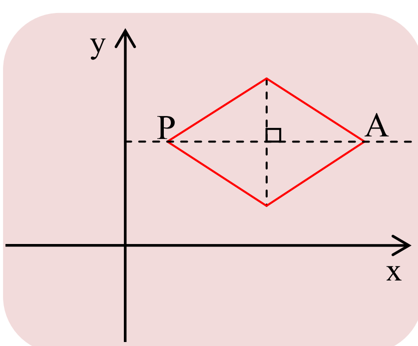
D) $(4, -2)$

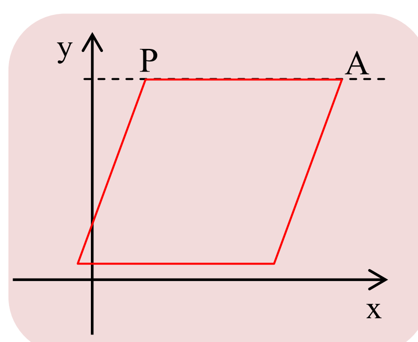
E) $(-1, 3)$

RESOLUCIÓN

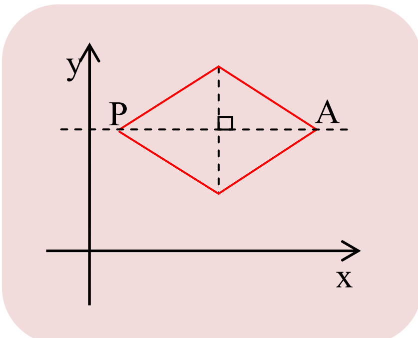
Para determinar la respuesta se debe analizar cada uno de posibles rombos que satisfacen la descripción dada en el enunciado y así, ver qué punto dado en las opciones es un vértice de él.

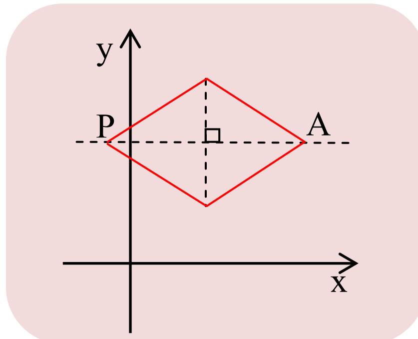
Se considerará el punto P como el vértice que tiene la misma ordenada que el punto A. El segmento $\overline{AP}$ puede ser una diagonal del rombo o un lado del rombo, tal como se muestra a continuación:

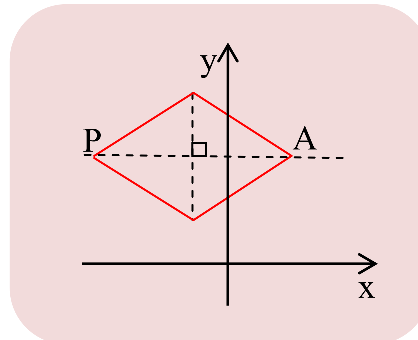




Por las condiciones del enunciado $\overline{AP}$ no puede ser la diagonal del rombo, pues en este caso el rombo puede tener 0, 1 ó 3 vértices con abscisa negativa, pero no exactamente 2, como se muestra a continuación:







Como $\overline{AP}$ no puede ser una diagonal del rombo, entonces este segmento corresponde a su lado.

Ahora, del enunciado se tiene que el perímetro del rombo es 20 unidades, luego cada uno de sus lados mide 5 unidades. Así, las posibles coordenadas para el punto P son $(-1, 3)$ y $(9, 3)$, pues son los únicos puntos a distancia 5 unidades del punto $A(4, 3)$ con ordenada 3. Como en el enunciado se indica que el punto P debe tener abscisa negativa, entonces este es $(-1, 3)$, luego la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

Contenido: Representación de puntos en el plano cartesiano

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: E

PREGUNTA 41

Al segmento AB se le aplica la siguiente composición de isometrías: una rotación respecto del origen en $90°$, en sentido antihorario, luego una traslación según el vector (c, c) seguida de una traslación según este mismo vector, obteniéndose el segmento $A'B'$, donde A' es la imagen de A. Si $A(x, y)$, $A'(c, 2(c + 1))$ y c es un número real negativo, ¿cuál de las siguientes coordenadas corresponden al punto A?

A) $(-c, -2)$

B) $(c, 2)$

C) $(2, c)$

D) $(2, -c)$

E) $(-2, 3c)$

RESOLUCIÓN

Para determinar las coordenadas del punto $A(x, y)$ se debe recordar que:

si a un punto de coordenadas (a, b) se le aplica una

◊ rotación de $90°$ en sentido antihorario con centro en el origen del plano cartesiano, se obtiene el punto $(-b, a)$.

◊ traslación según el vector (p, q), se obtiene el punto $(a + p, b + q)$.

Del enunciado se tiene que al segmento AB se le aplica una composición de isometrías, obteniéndose el segmento $A'B'$, donde A' es la imagen de A. En la siguiente tabla se detalla la aplicación de estas isometrías al punto A:

Punto	Isometría aplicada	Imagen
$A(x, y)$	Rotación respecto del origen en $90°$, en sentido antihorario	$(-y, x)$
$(-y, x)$	Traslación según el vector (c, c)	$(-y + c, x + c)$
$(-y + c, x + c)$	Traslación según el mismo vector (c, c)	$(-y + 2c, x + 2c)$

Como en el enunciado se plantea que la imagen obtenida después de la segunda traslación es $(c, 2(c + 1))$, se obtiene que $(-y + 2c, x + 2c) = (c, 2(c + 1))$.

> **Recuerde que:**
>
> si $(a, b) = (p, q)$, entonces $a = p$ y $b = q$

De esta manera, se tiene:

$-y + 2c = c$ $-y = -c$ $y = c$	$x + 2c = 2c + 2$ $x = 2$

Luego, las coordenadas de A son $(2, c)$, las que se encuentran en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas y utilizar la composición de funciones para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas.

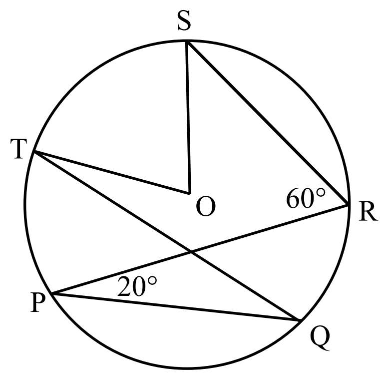
Contenido: Rotación y traslación de figuras en el plano cartesiano

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: C

PREGUNTA 42

En la figura adjunta los puntos P, Q, R, S y T están en la circunferencia de centro O y el arco TP es igual al arco QR.



¿Cuál es la medida del ∢ TOS?

A) 20°

B) 40°

C) 80°

D) 160°

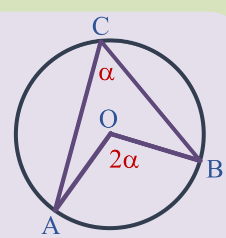
E) 100°

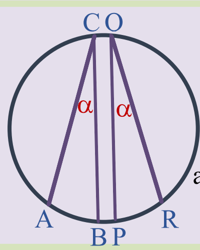
RESOLUCIÓN

Para determinar la medida del ∢ TOS de la figura es necesario recordar las relaciones que existen entre los ángulos interiores y el ángulo del centro en una circunferencia.

Recuerde que:

en una circunferencia de centro O, la medida del ángulo del centro (∢ AOB) es igual al doble de la medida del ángulo inscrito (∢ BCA) que subtiende el mismo arco.



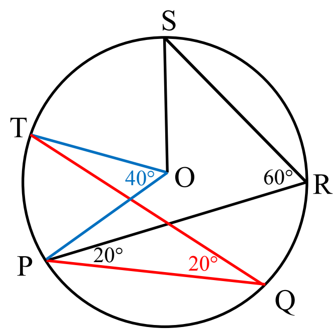


arco AB ≅ arco PR

en una circunferencia los ángulos inscritos que subtienden arcos congruentes tienen igual medida.

Como en el enunciado se dice que el arco TP es igual al arco QR, se tiene que $\measuredangle$ QPR = $\measuredangle$ TQP = 20°.

Ahora, si se traza el segmento PO se obtiene el $\measuredangle$ POT que subtiende el mismo arco que el $\measuredangle$ TQP inscrito en la circunferencia y por lo tanto, $\measuredangle$ POT = 40°, como se observa en la siguiente figura:



Por otro lado, se tiene que el $\measuredangle$ POS subtiende el mismo arco que el $\measuredangle$ PRS inscrito, por lo tanto, $\measuredangle$ POS = 120°.

Por último, de la relación $\measuredangle$ POT + $\measuredangle$ TOS = $\measuredangle$ POS se puede obtener la medida del $\measuredangle$ TOS, como se muestra a continuación:

$$\measuredangle \text{POT} + \measuredangle \text{TOS} = \measuredangle \text{POS}$$

$$40° + \measuredangle \text{TOS} = 120°$$

$$\measuredangle \text{TOS} = 80°$$

Luego, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.

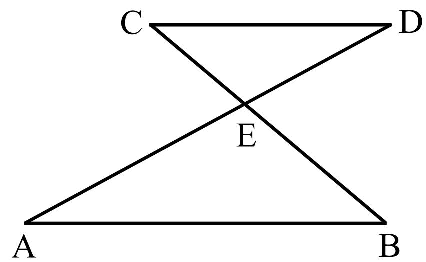
Contenido: Ángulos inscritos y del centro en una circunferencia

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 43

En la figura adjunta $\overline{CD}$ // $\overline{AB}$, CD = 8 cm, EC = 4 cm y CB = 10 cm.



¿Cuál es la medida de $\overline{AB}$?

A) 3 cm

B) 12 cm

C) 10 cm

D) $\dfrac{16}{3}$ cm

E) 20 cm

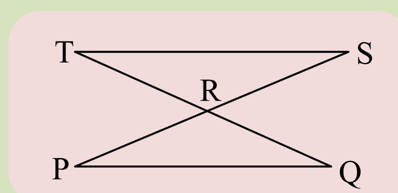
RESOLUCIÓN

Una manera de resolver el ítem es aplicar el teorema de Thales.

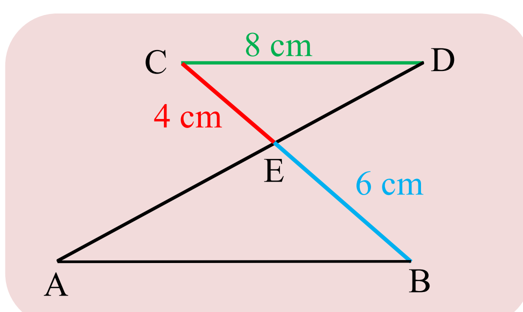
Recuerde que:

con el teorema de Thales se puede afirmar que

$\dfrac{TR}{RQ} = \dfrac{TS}{PQ}$, donde $\overline{TS}$ // $\overline{PQ}$.



Al completar los datos dados en el enunciado en la figura, se tiene:



Por lo que:

$$\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EB}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}}$$

$$\frac{4}{6} = \frac{8}{\mathrm{AB}}$$

$$\mathrm{AB} = \frac{6 \cdot 8}{4}$$

$$\mathrm{AB} = 12$$

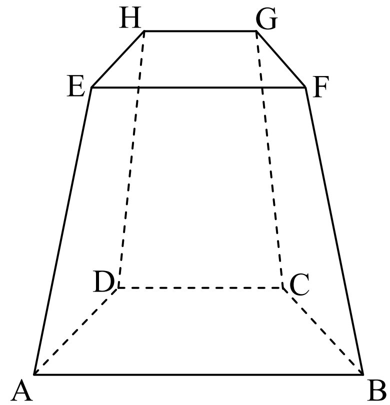
Como la medida del segmento solicitado es $12\ \mathrm{cm}$, la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría
Área Temática: Geometría proporcional
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.
Contenido: Teorema de Thales
Habilidad Cognitiva: Aplicar
Clave: B

PREGUNTA 44

En la figura adjunta se muestra un tronco de pirámide cuyas bases son paralelas y $ABCD$ es un trapecio isósceles.



¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\dfrac{\text{Perímetro } ABCD}{\text{Perímetro } EFGH} = \dfrac{BD}{EG}$

II) $\dfrac{\text{Área } ABCD}{\text{Área } EFGH} = \dfrac{BC}{FG} \cdot \dfrac{AD}{EH}$

III) Los triángulos ABD y EFH son semejantes.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver esta pregunta se debe determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III), teniendo en consideración el cuerpo geométrico de la figura.

Recuerde que:

◊ en un tronco de pirámide cuyas bases son paralelas, se tiene que los polígonos basales son semejantes.

◊ en un trapecio isósceles, se tiene que sus lados no paralelos son congruentes entre sí y las diagonales también son congruentes entre sí.

Por lo anterior, se tiene que los trapecios isósceles ABCD y EFGH son semejantes entre sí y por lo tanto, se verifican las relaciones entre los elementos de dos polígonos semejantes.

Recuerde que:

en dos polígonos semejantes

- ◊ la razón entre sus perímetros es igual a la razón entre las medidas de dos segmentos homólogos.
- ◊ la razón entre sus áreas es igual a la razón entre los cuadrados de las medidas de dos segmentos homólogos.

Como las diagonales $\overline{\mathrm{EG}}$ y $\overline{\mathrm{FH}}$ del trapecio EFGH son congruentes, se tiene que la razón entre los perímetros de ABCD y EFGH es igual a la razón entre las medidas de $\overline{\mathrm{BD}}$ y $\overline{\mathrm{FH}}$, es decir, entre las medidas de $\overline{\mathrm{BD}}$ y $\overline{\mathrm{EG}}$, por lo que la relación en I) es verdadera.

Ahora, como $\overline{\mathrm{BC}} \cong \overline{\mathrm{AD}}$ y $\overline{\mathrm{FG}} \cong \overline{\mathrm{EH}}$, se tiene que $\dfrac{\text{Área ABCD}}{\text{Área EFGH}} = \left(\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{FG}}\right)^2 = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{FG}} \cdot \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{EH}}$, de modo que la relación en II) también es verdadera.

Recuerde que:

si dos triángulos tienen tres pares de lados correspondientes proporcionales entre sí, entonces los triángulos son semejantes (criterio LLL).

Como los trapecios ABCD y EFGH son semejantes, sus elementos son proporcionales entre sí, o sea, $\mathrm{EH} : \mathrm{AD} = \mathrm{EF} : \mathrm{AB} = \mathrm{FH} : \mathrm{BD}$, lo que implica que los triángulos ABD y EFH son semejantes, por el criterio LLL. Así, la afirmación en III) es verdadera.

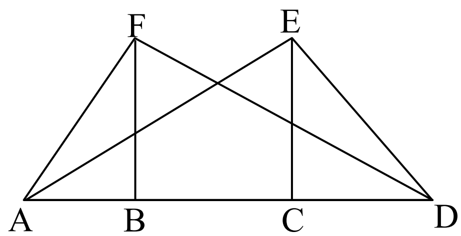
Debido a que las tres afirmaciones de la pregunta son verdaderas, la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría
Área Temática: Geometría proporcional
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.
Contenido: Semejanza de figuras planas
Habilidad Cognitiva: Comprender
Clave: E

PREGUNTA 45

En la figura adjunta los triángulos ADF y ADE son rectángulos en F y E, respectivamente, $\overline{FB}$ y $\overline{EC}$ son sus alturas y miden lo mismo.



¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) **siempre** igual(es) a la medida del segmento BC?

I) $AD - 2AB$

II) $AD - (2(EC)^2 : AC)$

III) $AD - (BF - EC)$

A) Solo II
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

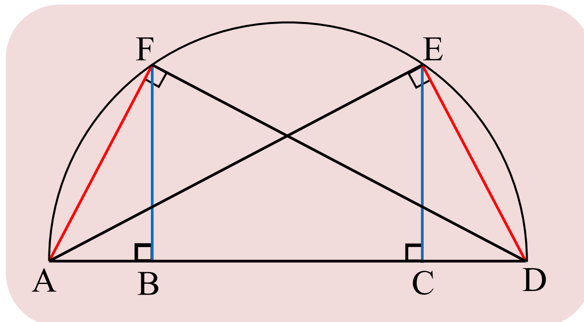
En esta pregunta se debe determinar cuál o cuáles de las expresiones dadas en I), en II) y en III) es igual a la medida del segmento BC.

Del enunciado y de la figura se obtiene que los triángulos ADF y ADE son rectángulos en F y en E, respectivamente, y ambos tienen la misma hipotenusa ($\overline{AD}$).

Recuerde que:

todo triángulo rectángulo está inscrito en una semicircunferencia donde la hipotenusa es el diámetro de dicha circunferencia.

Por lo que, los triángulos ADF y ADE están inscritos en una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ tal como se muestra a continuación:



Ahora, como $\overline{FB}$ y $\overline{EC}$ son alturas de estos triángulos y miden lo mismo, se deduce que los arcos DE y FA son congruentes, lo que implica que los segmentos AF y DE son de igual medida.

Recuerde que:

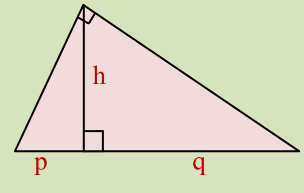
dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales la medida de dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos (criterio LLA).

Así, por el criterio LLA los triángulos ABF y DCE son congruentes, ya que $AF = DE$, $FB = EC$ y $\measuredangle ABF = \measuredangle DCE = 90°$, luego los segmentos AB y CD son congruentes.

Ahora, de la figura se obtiene que $BC = AD - AB - CD$ y como $AB = CD$, se obtiene que $BC = AD - 2AB$, luego la expresión en I) cumple con lo pedido.

Recuerde que:

en el teorema de Euclides referido a la altura en cualquier triángulo rectángulo, cuya altura (h) trazada desde el vértice opuesto a la hipotenusa, se cumple $h^2 = p \cdot q$, donde p y q son las medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



En el triángulo ADE se puede aplicar el teorema de Euclides para determinar una expresión que represente la medida del segmento CD, como se muestra a continuación:

$$EC^2 = AC \cdot CD$$

$$\frac{EC^2}{AC} = CD$$

Luego, $BC = AD - 2CD = AD - \dfrac{2(EC)^2}{AC}$, por lo que la expresión en II) es igual a la medida del segmento BC.

Por último, en III) se plantea que $BC = AD - (BF - EC)$, lo cual es falso, ya que $\overline{FB}$ y $\overline{EC}$ miden lo mismo como se dice en el enunciado, lo que implica que $BF - EC = 0$ y por lo tanto, $AD - (BF - EC) = AD$ y $AD \neq BC$.

Como solo las expresiones en I) y en II) son iguales a la medida del segmento BC, la clave es B).

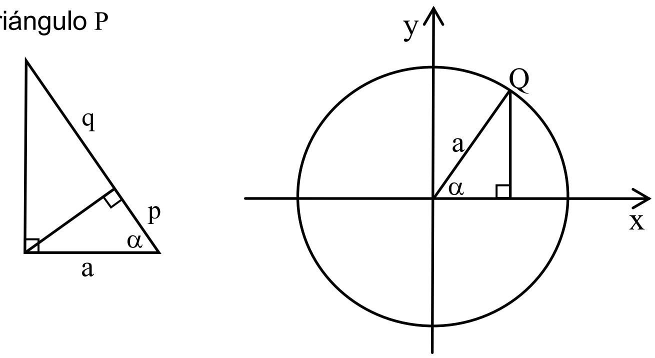
FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría
Área Temática: Geometría proporcional
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.
Contenido: Teorema de Euclides
Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar
Clave: B

PREGUNTA 46

En la figura adjunta se muestra el triángulo P y la circunferencia de centro en el origen del sistema de ejes coordenados.

Triángulo P



Si Q(x, y) es un punto de la circunferencia, ¿cuáles de las siguientes coordenadas corresponde al punto Q, en función de p y q?

A) $\left(p,\ \sqrt{pq}\right)$

B) $\left(p,\ \sqrt{p(p+q)}\right)$

C) $\left(q,\ \sqrt{pq}\right)$

D) $\left(q,\ pq\right)$

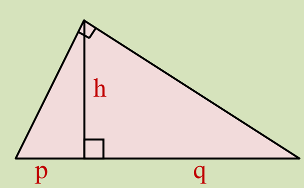
E) $\left(p,\ pq\right)$

RESOLUCIÓN

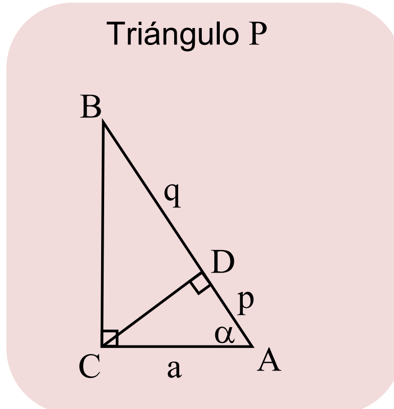
Una forma de resolver este ítem es aplicar el teorema de Euclides.

Recuerde que:

en el teorema de Euclides referido a la altura en cualquier triángulo rectángulo, cuya altura (h) trazada desde el vértice opuesto a la hipotenusa, se cumple $h^2 = p \cdot q$, donde p y q son las medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



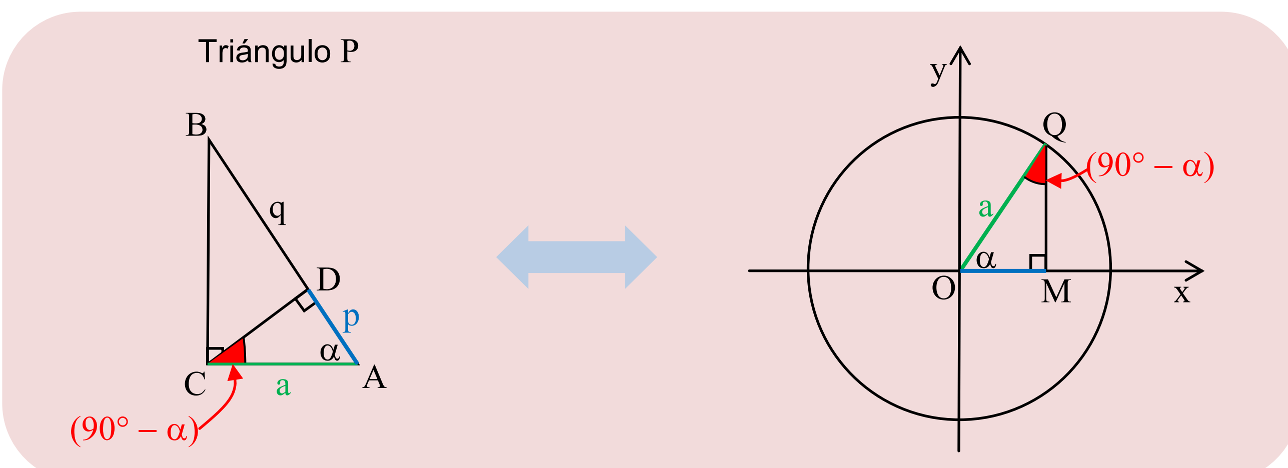
Se asignan letras a los vértices del triángulo así como al pie de altura, tal como se muestra a continuación:



Luego, aplicando el teorema de Euclides, se obtiene que:

$$CD^2 = AD \cdot DB$$
$$CD^2 = pq$$
$$CD = \sqrt{pq}$$

Ahora, el triángulo ADC es congruente al triángulo OMQ de la circunferencia, por el criterio ALA (ángulo-lado-ángulo), porque ambos tienen un ángulo de medida $(90° - \alpha)$, un ángulo de medida α y la medida de la hipotenusa en ambos triángulos es a, como se muestra a continuación:



Luego, como los triángulos son congruentes se tiene que $AD = OM = p$ y $CD = MQ = \sqrt{pq}$, por lo que las coordenadas de Q son $\left(p, \sqrt{pq}\right)$.

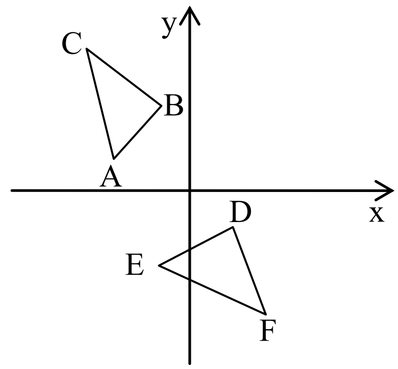
Del análisis anterior, la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría
Área Temática: Geometría proporcional
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.
Contenido: Teorema de Euclides
Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar
Clave: A

PREGUNTA 47

En el plano cartesiano de la figura adjunta se ubican los triángulos ABC y DEF:



Se puede determinar que estos triángulos son congruentes, si se sabe que:

(1) los triángulos son semejantes de razón 1.

(2) el triángulo DEF se obtiene de una o más transformaciones isométricas del triángulo ABC.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe analizar si con las informaciones dadas en (1) y/o en (2) se puede determinar que los triángulos ABC y DEF son congruentes.

Recuerde que:

si la razón de semejanza de dos triángulos es 1, entonces dichos triángulos son congruentes.

Ahora, en (1) se tiene que los triángulos son semejantes de razón 1, por lo que los triángulos ABC y DEF son congruentes. Por lo tanto, (1) es suficiente para determinar lo pedido.

Recuerde que:

una transformación isométrica convierte una figura en otra que es imagen de la primera y por lo tanto, congruente a la original.

Luego, en (2) se tiene que el triángulo DEF se obtiene de una o más transformaciones isométricas del triángulo ABC, por lo que también se puede determinar que los triángulos son congruentes.

De lo anterior, la opción correcta es D).

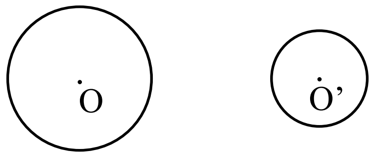
FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría
Área Temática: Geometría proporcional
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.
Contenido: Semejanza de triángulos
Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar
Clave: D

PREGUNTA 48

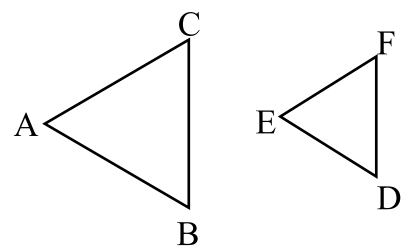
¿En cuál(es) de los siguientes pares de figuras, en el plano, una puede ser la imagen de la otra, producto de una homotecia?

I)



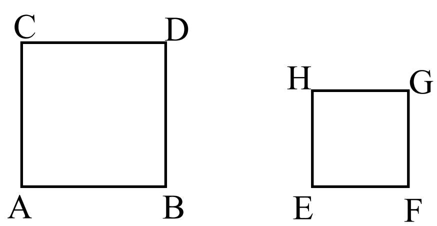
Las circunferencias de centro O y O' tienen distinto radio.

II)



Los triángulos ABC y EDF son equiláteros no congruentes, donde $\overline{BC} \,//\, \overline{DF}$.

III)



En los cuadrados ABDC y EFGH, se tiene que $\overline{AD} \,//\, \overline{EG}$.

A) Solo en I

B) Solo en I y en II

C) Solo en II y en III

D) En I, en II y en III

E) En ninguno de ellos

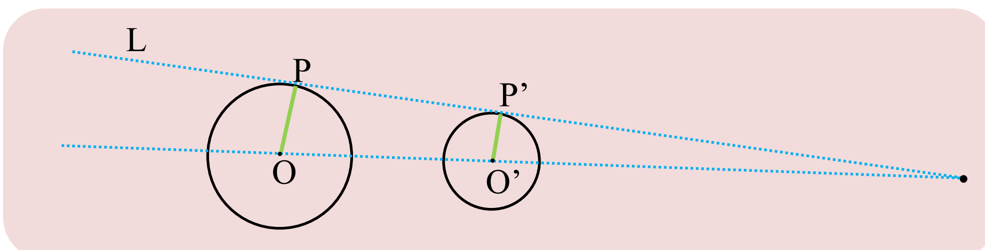
RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar en cuál o cuáles de los pares de figuras presentadas en I), en II) y en III) una de ellas puede ser la imagen de la otra, producto de una homotecia.

Recuerde que:

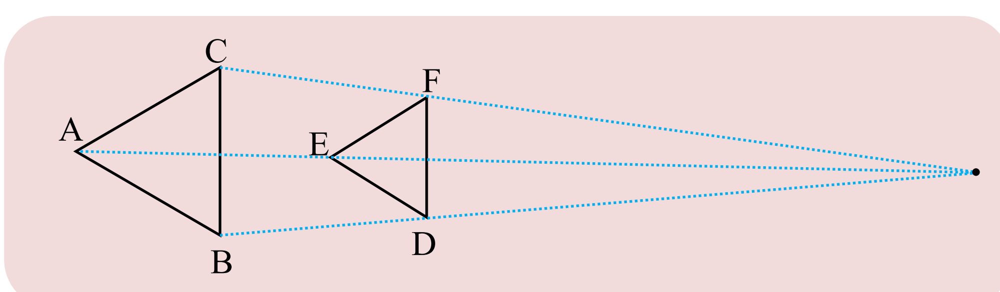
◊ si dos figuras son semejantes y tienen sus segmentos homólogos paralelos, entonces las figuras son homotéticas.
◊ dos circunferencias son siempre semejantes.
◊ dos triángulos equiláteros son siempre semejantes.
◊ dos cuadrados son siempre semejantes.

En I) se traza la recta L tangente a las circunferencias de centro O y O' en los puntos P y P', respectivamente, luego OP y O'P' son perpendiculares a L, por lo que estos segmentos son paralelos.

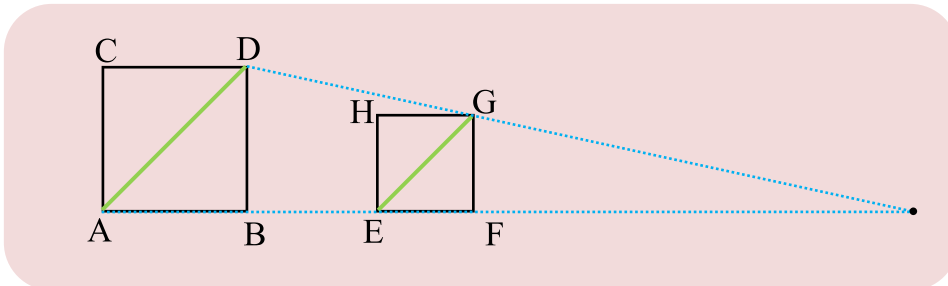


Como las circunferencias tienen radios distintos y además son semejantes, se tiene que la circunferencia de centro O' puede ser la imagen de la circunferencia de centro O producto de una homotecia.

En II) se tiene que los triángulos ABC y EDF son equiláteros, por lo tanto son semejantes y además, $\overline{BC}$ // $\overline{DF}$ lo que implica que el triángulo ABC puede ser la imagen del triángulo EDF producto de una homotecia.



Por último, en III) se tiene que $\overline{AD} \mathbin{//} \overline{EG}$ y como los cuadrados son semejantes, el cuadrado $ABCD$ puede ser la imagen del cuadrado $EFGH$ producto de una homotecia.



De lo anterior, la opción correcta es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría
Área Temática: Geometría proporcional
Nivel: Tercero medio
Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.
Contenido: Homotecia de figuras planas
Habilidad Cognitiva: Comprender
Clave: D

PREGUNTA 49

Al triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(1, 2)$ y $C(4, 6)$ se le aplicó una homotecia con centro el punto $(0, 0)$ y razón -3, obteniéndose el triángulo de vértices D, E y F. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Los lados homólogos de los triángulos son paralelos entre sí.

B) La imagen de B es $(-3, -6)$.

C) El triángulo DEF es semejante al triángulo ABC.

D) El área del triángulo DEF es menor que el área del triángulo ABC.

E) La imagen de C está en el tercer cuadrante.

RESOLUCIÓN

Una forma de responder este ítem y determinar cuál de las afirmaciones de las opciones es falsa es encontrar las coordenadas de los puntos D, E y F, para luego graficar el triángulo ABC y su homotético DEF.

Recuerde que:

◊ una homotecia es la transformación de una figura en otra semejante a ella, con respecto a un punto en el plano llamado centro de homotecia y a una razón dada llamada razón de homotecia, tal que cualquier segmento de la figura es paralelo al segmento correspondiente en la figura homotética.

◊ si (a, b) es el homotético de (c, d) respecto al centro de homotecia $(0, 0)$ y razón r, entonces $(a, b) = (rc, rd)$.

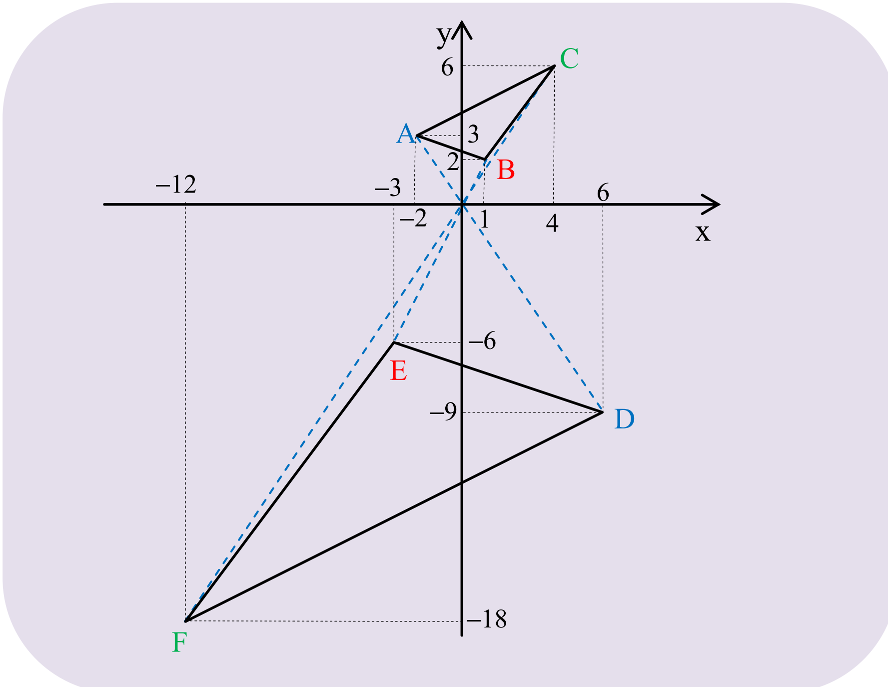
Así, al aplicar una homotecia de razón -3 y centro el punto $(0, 0)$ a los puntos $A(-2, 3)$, $B(1, 2)$ y $C(4, 6)$ se obtiene lo siguiente:

$$D = -3(-2, 3) = (6, -9)$$

$$E = -3(1, 2) \quad = (-3, -6)$$

$$F = -3(4, 6) \quad = (-12, -18)$$

Luego, la gráfica de los triángulos es:



La afirmación en A) es verdadera, porque como se aplicó una homotecia se tiene que los lados homólogos de los triángulos son paralelos entre sí.

La afirmación en B) es verdadera, pues la imagen del punto E por la homotecia es $(-3, -6)$.

La afirmación en C) es verdadera, porque como se aplicó una homotecia se tiene que los triángulos son semejantes.

La afirmación en D) es falsa, pues se puede observar del gráfico que las medidas del triángulo DEF son mayores que las medidas del triángulo ABC, por lo que su área es mayor y no menor.

Por último, la afirmación en E) es verdadera, pues se puede observar del gráfico que el vértice F está en el tercer cuadrante.

De lo anterior, la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría proporcional

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Homotecia de figuras planas

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

PREGUNTA 50

¿Para cuál(es) valor(es) de p las rectas de ecuación $\frac{x-1}{p} = \frac{2-y}{p}$ y $\frac{x-1}{1-p} = \frac{y-2}{2}$ son perpendiculares?

A) Solo para el 3

B) Solo para el 1

C) Solo para el -1

D) Solo para el -3

E) Para el 0 y el -1

RESOLUCIÓN

Una forma de resolver este ítem es obtener la pendiente de cada una de las ecuaciones de recta y en base a sus pendientes determinar para cuál(es) valor(es) de p se cumple que las rectas son perpendiculares.

Recuerde que:

◊ en la ecuación de una recta de la forma $y = mx + n$ se tiene que m es su pendiente.

◊ dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1.

Para determinar las pendientes de las rectas dadas en el enunciado se escribirá sus ecuaciones de la forma $y = mx + n$.

Así, despejando y en ambas ecuaciones, se tiene:

$\frac{x-1}{p} = \frac{2-y}{p}$	$\frac{x-1}{1-p} = \frac{y-2}{2}$
$x - 1 = 2 - y$	$2(x-1) = (1-p)(y-2)$
$y = -x + 1 + 2$	$2x - 2 = y - 2 - py + 2p$
$y = -x + 3$	$py - y = -2x + 2 - 2 + 2p$
	$y(p-1) = -2x + 2p$
	$y = -\frac{2x}{p-1} + \frac{2p}{p-1}$

De esta forma, las pendientes de estas rectas son -1 y $-\dfrac{2}{p-1}$.

Ahora, para determinar el o los posibles valores de p para el cual se cumple que las rectas son perpendiculares, se debe cumplir que:

$$-1 \cdot \left(-\frac{2}{p-1}\right) = -1$$

Luego, para despejar p se puede hacer el siguiente desarrollo:

$$-1 \cdot \left(-\frac{2}{p-1}\right) = -1$$

$$-\frac{2}{p-1} = 1$$

$$-2 = p - 1$$

$$p = -1$$

Por lo anterior, el valor de p para el cual las rectas son perpendiculares es solo -1, siendo C) la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría
Área Temática: Geometría posicional y métrica
Nivel: Tercero medio
Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.
Contenido: Rectas perpendiculares en el plano cartesiano
Habilidad Cognitiva: Aplicar
Clave: C

PREGUNTA 51

Un cuadrilátero tiene como vértices los puntos $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(a, b)$ y $D(0, b)$. Si a y b son números reales positivos, ¿cuál de las siguientes expresiones representa **siempre** la suma de las medidas de sus diagonales?

A) $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$

B) $2\sqrt{a^2 + b^2}$

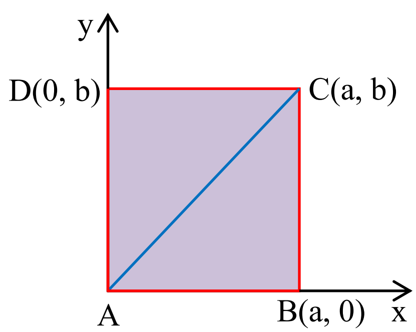
C) $2(a + b)$

D) $2(a^2 + b^2)$

E) $\sqrt{2}(a + b)$

RESOLUCIÓN

Para determinar la clave en este ítem se puede dibujar el cuadrilátero $ABCD$ en el plano cartesiano tal como se muestra a continuación:



Recuerde que:

en un sistema de coordenadas la distancia entre los puntos $P(x, y)$ y $Q(r, s)$ está dada por $d_{PQ} = \sqrt{(s-y)^2 + (r-x)^2}$.

Luego, la medida de una diagonal es $d_{AC} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Como los ángulos interiores son rectos se tiene que las diagonales de $ABCD$ miden lo mismo, por lo que la suma de sus diagonales es $2\sqrt{a^2 + b^2}$, siendo de esta forma la clave la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 52

¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 3)$?

A) $y = \frac{3}{2}x + 3$

B) $y = -\frac{3}{2}x + 3$

C) $y = -\frac{2}{3}x - 2$

D) $y = \frac{3}{2}x - 3$

E) $y = \frac{2}{3}x + 3$

RESOLUCIÓN

Para resolver el ítem se debe determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados en el enunciado, escribiéndola de la forma $y = mx + n$.

Recuerde que:

una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ está dada por $(y - d) = \frac{d - b}{c - a}(x - c)$.

Así, una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 3)$ es:

$$y - 3 = \frac{3 - 0}{0 - (-2)}(x - 0)$$

$$y - 3 = \frac{3}{2}x$$

$$y = \frac{3}{2}x + 3$$

De esta manera, se tiene que la clave es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 53

Considere las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones L_1: $y = ax + b$ y L_2: $y = cx + d$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $a = c$ y $b \neq d$, entonces L_1 y L_2 son paralelas no coincidentes.

II) Si $ac = -1$ y $b > d$, entonces las rectas se intersectan en el primer cuadrante.

III) Si $b = d$ y $c \neq a$, entonces L_1 y L_2 se intersectan en el punto $(0, b)$.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para determinar la clave del ítem se debe analizar la veracidad de las afirmaciones en I), en II) y en III).

Recuerde que:

◊ en la ecuación de una recta de la forma $y = mx + n$ se tiene que m es su pendiente y n es su coeficiente de posición.

◊ dos rectas son paralelas no coincidentes si sus pendientes son iguales y sus coeficientes de posición son distintos.

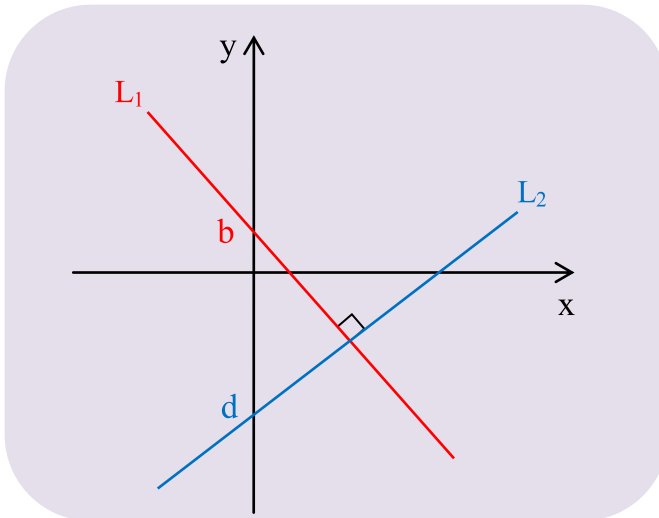
◊ dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes es igual a -1.

En la siguiente tabla se muestra la pendiente y el coeficiente de posición de las rectas L_1 y L_2.

	L_1: $y = ax + b$	L_2: $y = cx + d$
Pendiente	a	c
Coeficiente de posición	b	d

La afirmación en I) es verdadera, pues como $a = c$ y $b \neq d$, las rectas L_1 y L_2 son paralelas no coincidentes.

La afirmación en II) es falsa, ya que en la siguiente figura se muestra, un ejemplo de rectas L_1 y L_2 que cumplen con $ac = -1$ y $b > d$, pero su punto de intersección no está en el primer cuadrante.



Para determinar si la afirmación en III) es verdadera se debe resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ y = cx + d \end{array}\right|$ por cualquier método, en este caso por igualación, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} cx + d &= ax + b \\ cx - ax &= b - d \\ x(c - a) &= b - d \\ x &= \frac{b-d}{c-a} \end{aligned}$$

Reemplazando x en la ecuación de L_1

$$y = a \cdot \frac{b-d}{c-a} + b$$

Por lo tanto, el punto de intersección de las rectas es $\left(\frac{b-d}{c-a},\ a \cdot \frac{b-d}{c-a} + b\right)$, pero dado que $b = d$ y $c \neq a$, se tiene que $\frac{b-d}{c-a} = 0$, luego el punto de intersección es $(0, b)$, por lo que la afirmación en III) es verdadera.

Como solo las afirmaciones en I) y en III) son verdaderas, la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Establecer la relación entre la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen.

Contenido: Posiciones relativas de rectas en el plano cartesiano

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: D

PREGUNTA 54

Si los puntos $A(p, 0)$ y $B(0, q)$ son los puntos de intersección de la recta L con los ejes coordenados, donde p y q son números reales distintos de cero, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) La pendiente de L es $\frac{q}{p}$.

B) El punto $P(p, q)$ pertenece a L.

C) Si $pq < 0$, entonces L tiene pendiente negativa.

D) La ecuación $y = q\left(1 - \frac{x}{p}\right)$ representa a L.

E) L pasa por el origen del sistema de ejes coordenados.

RESOLUCIÓN

Para obtener la clave del ítem se debe analizar cada una de las afirmaciones de las opciones, para lo cual se encontrará la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(p, 0)$ y $B(0, q)$ y sus componentes.

Recuerde que:

◊ en la ecuación de una recta de la forma $y = mx + n$ se tiene que m es su pendiente y n es su coeficiente de posición.

◊ una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ está dada por $(y - d) = \frac{d - b}{c - a}(x - c)$.

Una ecuación de la recta que pasa por $A(p, 0)$ y $B(0, q)$ es:

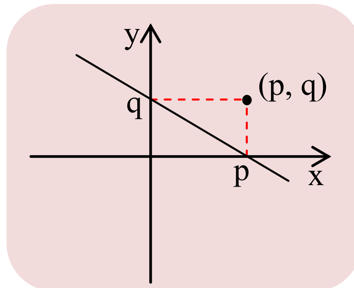
$$y - q = \frac{q - 0}{0 - p}(x - 0)$$

$$y - q = \frac{q}{-p}x$$

$$y = -\frac{q}{p}x + q$$

La afirmación en A) es falsa, pues la pendiente de L es $-\frac{q}{p}$.

La afirmación en B) es falsa, pues si se considera, por ejemplo, la siguiente gráfica donde $p > 0$ y $q > 0$, se tiene que $P(p, q)$ no pertenece a la recta L.



Además, como la recta no pasa por origen del sistema de ejes coordenados, la afirmación en E) es falsa.

En C), como $pq < 0$, se tiene que $\frac{q}{p} < 0$, por lo que $-\frac{q}{p} > 0$, siendo esta afirmación falsa.

Si se factoriza por q la expresión de la derecha de la ecuación $y = -\frac{q}{p}x + q$, se obtiene $y = q\left(1 - \frac{x}{p}\right)$, por lo que la afirmación en D) es verdadera, siendo esta la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: D

PREGUNTA 55

Sean los puntos $P(2, 0, 5)$ y $Q(3, n, 7)$ en el sistema de coordenadas tridimensional. ¿Para cuál de los siguientes valores de n, la distancia entre P y Q es 3 unidades?

A) Para el 4

B) Para el 2

C) Para el 6

D) Para el $\sqrt{14}$

E) Para el 0

RESOLUCIÓN

Para determinar un valor de n se debe aplicar la fórmula que permite determinar la distancia entre dos puntos en el sistema de coordenadas tridimensional.

> **Recuerde que:**
>
> en un sistema de coordenadas tridimensional la distancia entre los puntos $A(x, y, z)$ y $B(r, s, t)$ está dada por $d_{AB} = \sqrt{(r-x)^2 + (s-y)^2 + (t-z)^2}$.

Del enunciado se tiene que la distancia entre $P(2, 0, 5)$ y $Q(3, n, 7)$ es 3, por lo que se puede plantear la siguiente ecuación:

$$3 = \sqrt{(3-2)^2 + (n-0)^2 + (7-5)^2}$$

$$3 = \sqrt{1^2 + n^2 + 2^2}$$

$$3 = \sqrt{1 + n^2 + 4}$$

$$3 = \sqrt{5 + n^2}$$

$$9 = 5 + n^2$$

$$0 = 5 - 9 + n^2$$

$$0 = -4 + n^2$$

$$\boxed{0 = (n-2)(n+2)}$$

Por lo que n puede ser 2 ó -2.

De esta manera, se tiene que la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

Contenido: Distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas tridimensional

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 56

Una ecuación vectorial de la recta L está dada por $(x, y) = (6, 2) + \lambda(2, 3)$, donde λ pertenece al conjunto de los números reales. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una ecuación cartesiana de la recta L?

A) $3x - 2y = 14$

B) $3x - 2y = 4$

C) $3x + 2y = -22$

D) $3x + 2y = 22$

E) Ninguna de las anteriores

RESOLUCIÓN

Una forma de determinar una ecuación cartesiana de L es efectuar el siguiente procedimiento:

$$(x, y) = (6, 2) + \lambda(2, 3) = (6, 2) + (2\lambda, 3\lambda) = (6 + 2\lambda, 2 + 3\lambda)$$

Recuerde que:

si $(a, b) = (c, d)$, entonces $a = c$ y $b = d$.

Dado lo anterior se tiene:

$x = 6 + 2\lambda$	$y = 2 + 3\lambda$
$x - 6 = 2\lambda$	$y - 2 = 3\lambda$
$\dfrac{x-6}{2} = \lambda$	$\dfrac{y-2}{3} = \lambda$

Luego, se iguala λ obteniéndose la expresión $\dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y-2}{3}$, de donde se tiene lo siguiente:

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow 3(x-6) = 2(y-2)$$

$$3x - 18 = 2y - 4$$

$$3x - 2y = 14$$

Ecuación que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

Contenido: Ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 57

Si un rectángulo de lados $\mathrm{a\ cm}$ y $\mathrm{b\ cm}$, con $a \neq b$, se gira indefinidamente en torno a su lado de medida $\mathrm{b\ cm}$, ¿cuál es el área total del cuerpo que se genera en cm^2?

A) $2a\pi(a + b)$

B) $2ab\pi$

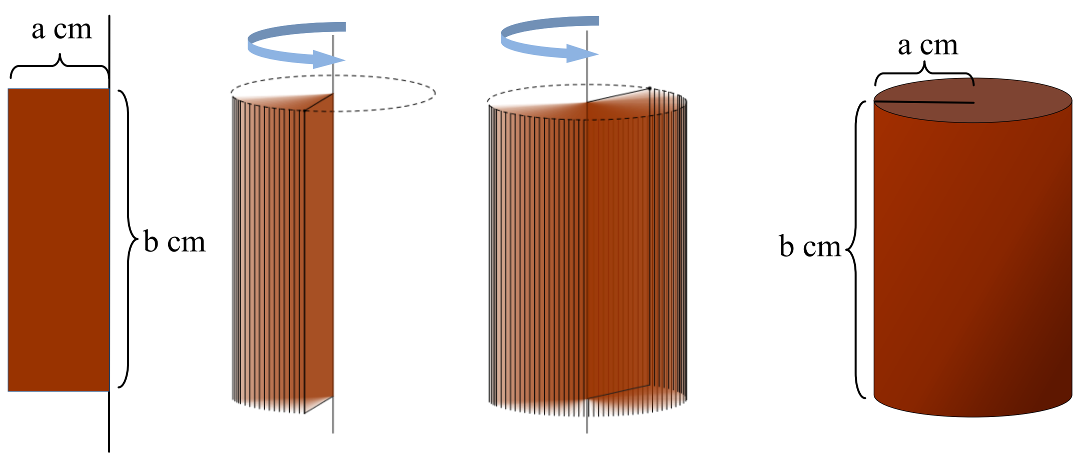
C) $4a\pi(2a + b)$

D) $ab\pi$

E) $a\pi\left(\frac{1}{2} + b\right)$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe recordar que el cuerpo que se genera al hacer girar indefinidamente un rectángulo de lados $\mathrm{a\ cm}$ y $\mathrm{b\ cm}$, entorno a su lado de medida $\mathrm{b\ cm}$, es un cilindro recto de radio basal $\mathrm{a\ cm}$ y altura $\mathrm{b\ cm}$, como se muestra en la siguiente figura:



Recuerde que:

en un cilindro recto de radio basal r y altura h, se tiene que su área total es $2\pi r^2 + 2\pi rh$.

De esta manera, el área total del cilindro de la figura es

$$2\pi a^2 + 2\pi ab = 2\pi a(a + b)$$

Expresión que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría posicional y métrica

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.

Contenido: Área de cuerpos geométricos generados por la rotación de una figura plana

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 58

Una recta de ecuación $y = mx + n$ intersecta a los ejes coordenados en los puntos R y S. Se puede determinar la distancia de R a S, si se conoce el valor de:

(1) m y las coordenadas de un punto de la recta.

(2) n y se sabe que la recta pasa por $\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para resolver el problema se debe determinar si con las informaciones dadas en el enunciado, junto a la entregada en (1) y/o en (2), se puede calcular la distancia entre los puntos R y S.

Recuerde que:

◊ una recta intersecta al eje x en un punto de la forma $(x, 0)$ e intersecta al eje y en un punto de la forma $(0, y)$.

◊ la distancia entre dos puntos $P(t, u)$ y $Q(r, s)$ está dada por $d_{PQ} = \sqrt{(s-u)^2 + (r-t)^2}$.

◊ en la ecuación de una recta de la forma $y = px + q$ se tiene que p es su pendiente e intersecta al eje y en el punto $(0, q)$.

◊ la ecuación de una recta que tiene pendiente p y pasa por el punto (x_1, y_1) es $y - y_1 = p(x - x_1)$.

Del enunciado se tiene que la recta de ecuación $y = mx + n$ tiene pendiente m e intersecta al eje y en el punto $(0, n)$, además, intersecta a los ejes coordenados en los puntos R y S que son de la forma $(x, 0)$ y $(0, y)$.

En (1) se conoce el valor de m y las coordenadas de un punto de la recta luego, se puede determinar la ecuación de la recta. De esta ecuación se determinan los puntos de intersección con los ejes coordenados R y S, y por último, se puede determinar la distancia entre dichos puntos.

En (2) se conoce el valor de n, por lo que se tiene el punto donde la recta intersecta al $\text{eje } y$. Además, se sabe que la recta pasa por $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, que es el punto donde la recta intersecta al $\text{eje } x$. Luego, se conocen las coordenadas de R y S por lo que se puede determinar la distancia entre dichos puntos.

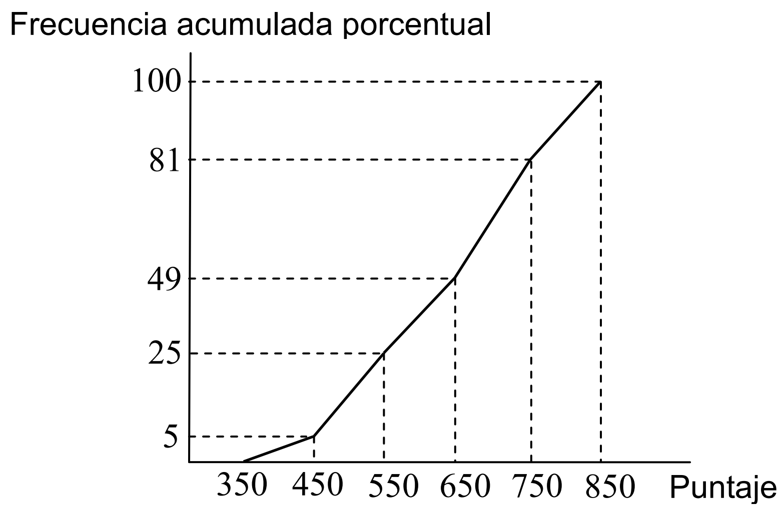
Como con la información dada en (1) y con la información dada en (2), por separado, se puede determinar la distancia entre R y S, la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría
Área Temática: Geometría posicional y métrica
Nivel: Tercero medio
Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.
Contenido: Distancia entre dos puntos del plano cartesiano
Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar
Clave: D

PREGUNTA 59

En la ojiva de la figura adjunta se muestra la distribución de los puntajes de 300 estudiantes en una prueba, donde los intervalos del gráfico son de la forma $[a, b[$, excepto el último que es de la forma $[c, d]$.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) El intervalo modal es $[750, 850]$.

B) Solo 49 estudiantes obtuvieron menos de 650 puntos.

C) 181 estudiantes obtiene más de 650 puntos.

D) La mediana de los puntajes se encuentra en el intervalo $[750, 850]$.

E) Un 25% de los estudiantes obtiene menos de 550 puntos.

RESOLUCIÓN

Para determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en las opciones se puede construir una tabla de frecuencias con los datos de la ojiva de la figura, como se muestra a continuación:

Puntaje	Frecuencia acumulada porcentual	Frecuencia porcentual	Frecuencia
$[350, 450[$	5	5	$\frac{5}{100} \cdot 300 = 15$
$[450, 550[$	25	$25 - 5 = 20$	$\frac{20}{100} \cdot 300 = 60$
$[550, 650[$	49	$49 - 25 = 24$	$\frac{24}{100} \cdot 300 = 72$
$[650, 750[$	81	$81 - 49 = 32$	$\frac{32}{100} \cdot 300 = 96$
$[750, 850]$	100	$100 - 81 = 19$	$\frac{19}{100} \cdot 300 = 57$
Total		100	300

Recuerde que:

el intervalo modal es el intervalo de mayor frecuencia.

La afirmación en A) es falsa, pues de la tabla precedente se tiene que el intervalo con mayor frecuencia es $[650, 750[$.

Ahora, la afirmación en B) también es falsa, ya que los estudiantes que obtuvieron menos de 650 puntos son $15 + 60 + 72 = 147$ estudiantes.

Por su parte, la afirmación en C) también es falsa, porque los estudiantes que obtuvieron más de 650 puntos son los que están incluidos en $[650, 750[$ y en $[750, 850]$, por lo que a lo más son 153 estudiantes.

Recuerde que:

la mediana de un grupo de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el 50% de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el 50% de los valores son mayores o iguales a él.

La afirmación D) es falsa, pues en la columna de las frecuencias acumuladas porcentuales de la tabla, el primer intervalo donde se acumula un 50% de los datos es $\left[650, 750\right[$, lo que implica que la mediana se encuentra en este intervalo.

Por último, la afirmación en E) es verdadera, pues de la columna de las frecuencias acumuladas porcentuales de la tabla se tiene que al intervalo $\left[450, 550\right[$ se ha acumulado un 25% de los estudiantes, es decir, este porcentaje corresponde a la cantidad de estudiantes que obtiene menos de 550 puntos.

Así, la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar
Área Temática: Datos
Nivel: Primero medio
Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.
Contenido: Interpretación de gráficos estadísticos
Habilidad Cognitiva: Comprender
Clave: E

PREGUNTA 60

En la tabla adjunta se muestra, en intervalos, el tiempo que los usuarios utilizaron un computador de una biblioteca durante un fin de semana.

Tiempo en minutos	Número de usuarios
$[0, 5[$	45
$[5, 10[$	38
$[10, 15[$	30
$[15, 20[$	45
$[20, 25[$	36
$[25, 30]$	15

Según los datos de la tabla, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Hubo un total de 209 usuarios ese fin de semana.

B) Los intervalos modales son $[0, 5[$ y $[15, 20[$.

C) Hubo 158 usuarios que utilizaron un computador a lo menos 20 minutos.

D) Hubo 96 usuarios que utilizaron un computador 15 o más minutos.

E) La mediana se encuentra en el intervalo $[10, 15[$.

RESOLUCIÓN

En esta pregunta se debe determinar cuál de las afirmaciones dadas en las opciones es falsa con respecto a los datos de la tabla adjunta.

Para determinar la veracidad de la afirmación en A) se debe sumar el número de usuarios pertenecientes a cada uno de los intervalos y así obtener el total de usuarios ese fin de semana. Esto es:

$$45 + 38 + 30 + 45 + 36 + 15 = 209 \text{ usuarios}$$

Luego, la opción A) es verdadera.

Para determinar la veracidad de la afirmación en B) recuerde que:

> el intervalo modal es el intervalo de mayor frecuencia.

Se observa de la tabla que los intervalos con mayor frecuencia son los que tienen frecuencia 45, los cuales son $[0, 5[$ y $[15, 20[$. Por lo tanto, la afirmación en B) es verdadera.

Los usuarios que utilizaron un computador a lo menos 20 minutos, es decir, 20 o más minutos, son los que están en los intervalos $[20, 25[$ y $[25, 30]$, o sea, $36 + 15 = 51$ usuarios. Luego, la afirmación en C) es falsa.

Los usuarios que utilizaron un computador 15 o más minutos son los pertenecientes a los intervalos $[15, 20[$, $[20, 25[$ y $[25, 30]$, es decir, $45 + 36 + 15 = 96$ usuarios. Por lo que, la afirmación en D) es verdadera.

Recuerde que:

- ◊ la mediana de un grupo de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el 50% de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el 50% de los valores son mayores o iguales a él.

- ◊ la frecuencia acumulada porcentual de un intervalo se determina sumando las frecuencias de todos los intervalos inferiores o iguales al considerado, luego dividiendo este resultado por el total de datos y por último, multiplicando lo obtenido por 100.

Por último, para determinar el intervalo donde se encuentra la mediana se puede agregar la columna de las frecuencias acumuladas porcentuales a la tabla hasta acumular el 50% de los datos, tal como se muestra a continuación:

Tiempo en minutos	Número de usuarios	Frecuencia acumulada porcentual
$[0, 5[$	45	$\frac{45}{209} \cdot 100 \approx 21{,}5$
$[5, 10[$	38	$\frac{45+38}{209} \cdot 100 \approx 39{,}7$
$[10, 15[$	30	$\frac{45+38+30}{209} \cdot 100 \approx 54{,}1$
$[15, 20[$	45	
$[20, 25[$	36	
$[25, 30]$	15	

Como en este intervalo se acumula el $54{,}1\%$ de los datos y en el intervalo anterior se acumulaba el $39{,}7\%$ de los datos, la mediana se encuentra en este intervalo.

Lo que implica que la afirmación en E) es verdadera.

Por lo anterior, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Contenido: Interpretación de tablas de frecuencias

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 61

En la tabla adjunta se muestra la distribución de todos los datos del ausentismo laboral que se registra durante un año en una empresa.

Cantidad de días de ausencias	Cantidad de trabajadores	Frecuencia relativa de la cantidad de trabajadores
$[0, 3[$	15	Q
$[3, 6[$	5	0,2
$[6, 9[$	P	0,12
$[9, 12]$	2	R

Según los datos de la tabla, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Hubo un total de 25 ausencias durante ese año.

II) Un 60% de los trabajadores se ausentó menos de 3 días ese año.

III) 20 trabajadores faltaron menos de 6 días a su trabajo ese año.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) Solo I y II

E) Solo II y III

RESOLUCIÓN

Para responder el ítem se debe determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III), en relación a los datos de la tabla adjunta.

La afirmación en I) es falsa, pues de la tabla no se puede deducir cuántos son los días de ausentismo de cada trabajador, solo se sabe, por ejemplo, del segundo intervalo que hay

5 trabajadores que se ausentaron 3 o más días, pero menos de 6 días. Por lo tanto, no se puede determinar el total de días de ausentismo que hubo en la empresa ese año.

Ahora en II), para determinar si un 60% de los trabajadores se ausentó menos de 3 días ese año, se encontrará la cantidad total de trabajadores para luego, determinar si los 15 trabajadores que se indica en la tabla corresponden al 60% de los trabajadores.

Recuerde que:

la frecuencia relativa de un intervalo se determina dividiendo la frecuencia del intervalo por la cantidad total de datos.

De la fila correspondiente al intervalo $[3, 6[$ se puede determinar la cantidad total x de trabajadores de la empresa, de la siguiente manera:

$$\frac{5}{x} = 0{,}2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{5}{0{,}2} = 25$$

Luego, para determinar el porcentaje (p) que corresponde a los 15 trabajadores que se ausentó menos de 3 días ese año, se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{15}{p} = \frac{25}{100} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{15 \cdot 100}{25} = 60$$

Como $p = 60\%$, se tiene que la afirmación en II) es verdadera.

Por último, para determinar la cantidad de trabajadores que faltaron menos de 6 días a su trabajo ese año, se debe sumar la cantidad de trabajadores correspondientes a los intervalos $[0, 3[$ y $[3, 6[$, es decir, $15 + 5 = 20$ trabajadores, por lo que la afirmación en III) también es verdadera.

Como las afirmaciones en II) y en III) son verdaderas, se tiene que la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Contenido: Organización de datos en una tabla de frecuencias

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 62

Se realizó el experimento de lanzar dos dados 200 veces, anotando la suma de los puntos obtenidos. El resultado de la suma de los resultados en cada lanzamiento se muestra en la tabla adjunta.

Suma de puntos	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencia	10	18	13	19	26	24	25	16	20	17	12

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El primer cuartil de la suma de los puntos es 5 puntos.

II) El tercer quintil de la suma de los puntos es 8 puntos.

III) El percentil 54 de la suma de los puntos es 7 puntos.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) se debe recordar que:

◊ el primer cuartil C_1, de un conjunto de n datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el 25% de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el 75% de los valores son mayores o iguales a él.

◊ el tercer quintil Q_3, de un conjunto de n datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el 60% de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el 40% de los valores son mayores o iguales a él.

◊ el percentil 54 de un conjunto de datos, ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el 54% de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el 46% de los valores son mayores o iguales a él.

Una manera de determinar los indicadores de posición involucrados en las afirmaciones es construir una tabla con la columna de las frecuencias acumuladas como se muestra a continuación:

Suma de puntos	Frecuencia	Frecuencia acumulada
2	10	10
3	18	$10 + 18 = 28$
4	13	$28 + 13 = 41$
5	19	$41 + 19 = 60$
6	26	$60 + 26 = 86$
7	24	$86 + 24 = 110$
8	25	$110 + 25 = 135$
9	16	$135 + 16 = 151$
10	20	$151 + 20 = 171$
11	17	$171 + 17 = 188$
12	12	$188 + 12 = 200$

Para determinar el primer cuartil de la suma de los puntos, se calcula el 25% del total de veces que se lanzaron los dos dados, es decir, $200 \cdot 0{,}25 = 50$. Ahora, al observar la columna de las frecuencias acumuladas, se tiene que hasta la suma de puntos igual a 4 hay 41 datos y que hasta la suma de puntos igual a 5 hay 60 datos, luego 5 puntos es el primer cuartil, siendo la afirmación en I) verdadera.

Para determinar el tercer quintil de la suma de los puntos, se calcula el 60% del total de veces que se lanzaron los dos dados, es decir, $200 \cdot 0{,}60 = 120$. Ahora, al observar la columna de las frecuencias acumuladas, se tiene que hasta la suma de puntos igual a 7 hay 110 datos y que hasta la suma de puntos igual a 8 hay 135 datos, luego 8 puntos es el tercer quintil, siendo la afirmación en II) también verdadera.

Por último, para determinar el percentil 54 de la suma de los puntos, se calcula el 54% del total de veces que se lanzaron los dos dados, es decir, $200 \cdot 0{,}54 = 108$. Ahora, al observar la columna de las frecuencias acumuladas, se tiene que hasta la suma de puntos igual a 6 hay 86 datos y que hasta la suma de puntos igual a 7 hay 110 datos, luego 7 puntos es el tercer quintil, por lo que la afirmación en III) es verdadera.

Como las afirmaciones en I), en II) y en III) son verdaderas, la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar
Área Temática: Datos
Nivel: Primero medio
Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.
Contenido: Medidas de posición
Habilidad Cognitiva: Aplicar
Clave: E

PREGUNTA 63

¿Cuántas muestras de tamaño 2, 3, 4, 5 ó 6, sin orden y sin reposición, se pueden obtener en total de un conjunto de 7 elementos?

A) $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6}$

B) $\binom{7}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{7}{5} \cdot \binom{7}{6}$

C) $7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

D) $7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6$

E) $7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^4 \cdot 7^5 \cdot 7^6$

RESOLUCIÓN

Para determinar la cantidad total de muestras que se pueden obtener de los tamaños indicados en el enunciado, sin orden y sin reposición, se debe recordar que:

> el total de muestras distintas, sin reposición y sin orden, de tamaño k que se pueden extraer desde una población de m elementos es $\binom{m}{k}$.

Como las muestras se deben obtener de un conjunto de 7 elementos, se tiene que $m = 7$ y como las muestras deben ser de los tamaños 2, 3, 4, 5 ó 6, se tiene que el total de muestras es la suma de todas las muestras que se pueden obtener de cada uno de estos tamaños, es decir,

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6}$$

Expresión que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Comprender la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población.

Contenido: Muestras de un tamaño dado que se pueden extraer desde una población de tamaño finito sin reemplazo

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: A

PREGUNTA 64

Sean $4{,}0$; $6{,}0$; $4{,}0$; $6{,}0$ y $5{,}0$ cinco notas de estudiantes del 4°A de un colegio y sean $4{,}0$; $4{,}0$; $5{,}0$; $2{,}0$ y $5{,}0$ cinco notas de estudiantes del 4°B del mismo colegio. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) La media aritmética de las cinco notas del 4°B es mayor que la media aritmética de las cinco notas del 4°A.

B) La desviación estándar de las cinco notas del 4°A es mayor que la desviación estándar de las cinco notas del 4°B.

C) El percentil 50 de las cinco notas del 4°A es mayor que el percentil 50 de las cinco notas del 4°B.

D) El rango de las cinco notas del 4°B es igual que el rango de las cinco notas del 4°A.

E) Si a las cinco notas del 4°A se le agrega una nota $6{,}0$, entonces el promedio de estas notas no varía respecto a las notas originales.

RESOLUCIÓN

En esta pregunta se debe determinar la veracidad de las afirmaciones dadas en las opciones en relación a la comparación de las notas de los estudiantes del 4°A y las del 4°B de un colegio.

La media aritmética de las notas de cada curso es:

4°A	4°B
$\dfrac{4{,}0 + 6{,}0 + 4{,}0 + 6{,}0 + 5{,}0}{5} = 5{,}0$	$\dfrac{4{,}0 + 4{,}0 + 5{,}0 + 2{,}0 + 5{,}0}{5} = 4{,}0$

Así, la media aritmética de las notas del 4°A es mayor que la media aritmética de las notas del 4°B, por lo que la afirmación en A) es falsa.

En B) se debe comparar la desviación estándar de las notas, para lo cual hay que recordar que:

para calcular la desviación estándar (σ) de los datos de una población se puede aplicar la fórmula $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\overline{x}\right)^2}$, donde x_i es el i-ésimo dato y $\overline{x}$ es el promedio de los n datos.

De esta manera, la desviación estándar de las notas de cada curso es:

4°A	4°B
$\sqrt{\dfrac{4{,}0^2+6{,}0^2+4{,}0^2+6{,}0^2+5{,}0^2}{5}-5{,}0^2}=\sqrt{0{,}8}$	$\sqrt{\dfrac{4{,}0^2+4{,}0^2+5{,}0^2+2{,}0^2+5{,}0^2}{5}-4{,}0^2}=\sqrt{1{,}2}$

Por lo anterior, la desviación estándar de las notas del 4°A es menor que la desviación estándar de las notas del 4°B, por lo que la afirmación en B) es falsa.

En C) se debe comparar el percentil 50 de las notas, para lo cual hay que recordar que:

el percentil 50 de un grupo de n datos ordenados de menor a mayor, con n impar, corresponde al dato que está en la posición $\dfrac{n+1}{2}$.

Al ordenar las notas de los dos cursos se tiene lo siguiente:

4°A	4°B
4,0	2,0
4,0	4,0
5,0	4,0
6,0	5,0
6,0	5,0

Percentil 50 de cada curso

De la tabla anterior se tiene que el percentil 50 de las notas del 4°A es mayor que el percentil 50 de las notas del 4°B, lo que implica que la afirmación en C) es verdadera.

En D) se debe comparar el rango de las notas, para lo cual hay que recordar que:

el rango de un grupo de datos, es un valor que se obtiene restando al valor máximo del conjunto de datos el valor mínimo de dicho grupo de datos.

Luego, el rango se calcula con la nota mayor y con la menor de cada curso, tal como se muestra a continuación:

4°A	4°B
$6{,}0 - 4{,}0 = 2{,}0$	$5{,}0 - 2{,}0 = 3{,}0$

Así, de la tabla anterior se obtiene que el rango de las notas del 4°A es menor que el rango de las notas del 4°B, lo que implica que la afirmación en D) es falsa.

Por último, la afirmación en E) es falsa, pues si a las notas del 4°A se le agrega una nota $6{,}0$ el promedio de estas seis notas es mayor que el promedio de las cinco notas originales como se muestra a continuación:

$$\frac{4{,}0 + 6{,}0 + 4{,}0 + 6{,}0 + 5{,}0 + 6{,}0}{6} = 5{,}1\overline{6} \quad > \quad 5{,}0$$

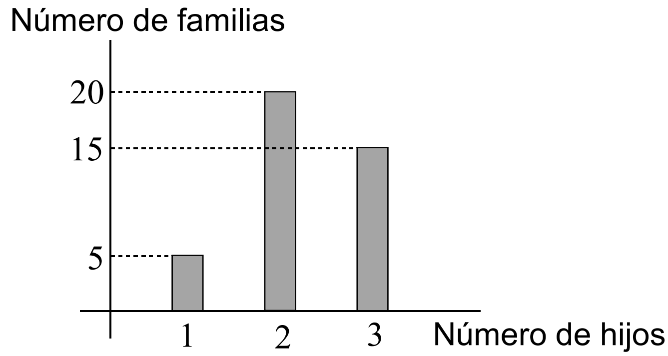
Por el desarrollo anterior, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar
Área Temática: Datos
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.
Contenido: Análisis de las características de dos muestras de datos
Habilidad Cognitiva: Aplicar
Clave: C

PREGUNTA 65

El número de hijos que tienen todas las familias asistentes a una reunión se resume en el gráfico de la figura adjunta.



En relación con este gráfico, ¿cuál es la varianza del número de hijos de este grupo de familias?

A) $\dfrac{5 \cdot (1{,}25)^2 + 20 \cdot (0{,}25)^2 + 15 \cdot (0{,}75)^2}{40}$

B) $\dfrac{20 \cdot 1^2 + 20 \cdot 0^2}{40}$

C) $\dfrac{(1{,}25)^2 + (0{,}25)^2 + (0{,}75)^2}{40}$

D) $\dfrac{5 \cdot 1^2 + 20 \cdot 2^2 + 15 \cdot 3^2}{40}$

E) $5 \cdot (1{,}25)^2 + 20 \cdot (0{,}25)^2 + 15 \cdot (0{,}75)^2$

RESOLUCIÓN

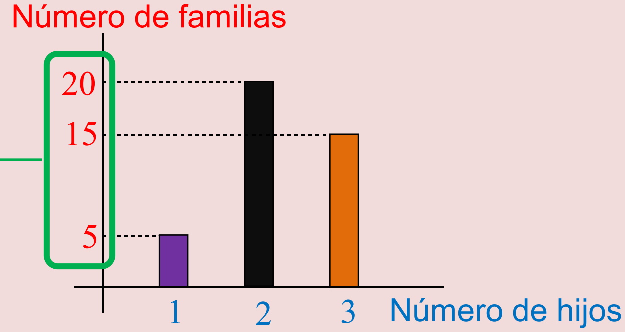
Para determinar la varianza del número de hijos de este grupo de familias, se debe extraer la información que se presenta en el gráfico.

Recuerde que:

- ◊ el promedio de un conjunto de datos, corresponde a la suma de todos los datos divididos por el total de datos.
- ◊ para calcular la varianza (σ^2) de los datos de una población se puede aplicar la fórmula $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}$, donde x_i es el i-ésimo dato y $\overline{x}$ es el promedio de los n datos.

Para determinar la varianza se debe calcular primero el promedio de hijos por familia, el que consiste en dividir la cantidad total de hijos por el número de familias. A partir del gráfico se tiene lo siguiente:

El número de familias es $20 + 15 + 5 = 40$



5 familias con solo 1 hijo, es decir, son $5 \cdot 1 = 5$ hijos.
20 familias con solo 2 hijos, es decir, son $20 \cdot 2 = 40$ hijos.
15 familias con solo 3 hijos, es decir, son $15 \cdot 3 = 45$ hijos.
El número total de hijos es $5 + 40 + 45 = 90$ hijos.

Por lo tanto, el promedio de la cantidad de hijos por familia es $\frac{90}{40} = 2{,}25$ y la varianza se expresa tal como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{5 \cdot (1 - 2{,}25)^2 + 20 \cdot (2 - 2{,}25)^2 + 15 \cdot (3 - 2{,}25)^2}{40} \\
&= \frac{5 \cdot (-1{,}25)^2 + 20 \cdot (-0{,}25)^2 + 15 \cdot (0{,}75)^2}{40} \\
&= \frac{5 \cdot (1{,}25)^2 + 20 \cdot (0{,}25)^2 + 15 \cdot (0{,}75)^2}{40}
\end{aligned}
$$

Expresión que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

Contenido: Varianza de un conjunto de datos

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 66

Considere los datos de la población $(a + 6)$, $(a + 3)$, $(a + 5)$ y $(a + 2)$, con $a \neq 0$. ¿Cuál es la desviación estándar de estos datos?

A) $a + 4$

B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

C) $\sqrt{2,5} + a$

D) $\sqrt{18,5}$

E) $\sqrt{2,5}$

RESOLUCIÓN

Para calcular la desviación estándar de los datos del enunciado se debe recordar que:

Recuerde que:

◊ para calcular la desviación estándar (σ) de los datos de una población se puede aplicar la fórmula $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\overline{x}\right)^2}$, donde x_i es el i-ésimo dato y $\overline{x}$ es el promedio de los n datos.

◊ si σ es la desviación estándar de un grupo de n datos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, …, x_n, entonces la desviación estándar de n datos $x_1 + k$, $x_2 + k$, $x_3 + k$, $x_4 + k$, $x_5 + k$, …, $x_n + k$, es σ.

◊ el promedio de un conjunto de datos corresponde a la suma de todos los datos divididos por el total de datos.

Debido a que todos los datos están compuestos por la suma de un número y el término a, se puede establecer que la desviación estándar de $(a + 6)$, $(a + 3)$, $(a + 5)$ y $(a + 2)$ es igual a la desviación estándar de 6, 3, 5 y 2. De esta forma, se tiene que:

- promedio de 6, 3, 5 y 2 es:

$$\frac{6+3+5+2}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

- desviación estándar de 6, 3, 5 y 2 es:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{6^2+3^2+5^2+2^2}{4} - 4^2} &= \sqrt{\frac{36+9+25+4}{4} - 16} \\ &= \sqrt{\frac{74}{4} - 16} \\ &= \sqrt{18{,}5 - 16} \\ &= \sqrt{2{,}5}\end{aligned}$$

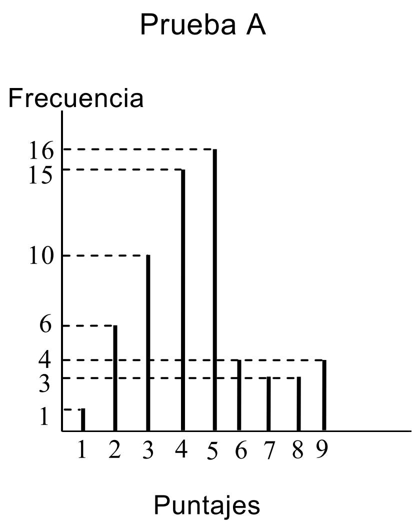
Por lo tanto, la clave es E).

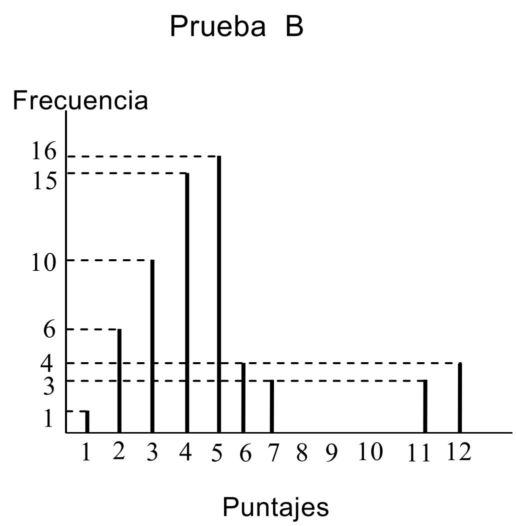
FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar
Área Temática: Datos
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.
Contenido: Desviación estándar de un conjunto de datos
Habilidad Cognitiva: Aplicar
Clave: E

PREGUNTA 67

En los gráficos de la figura adjunta están representados los puntajes obtenidos en dos pruebas, A y B.





¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones se puede(n) deducir de la figura, con respecto a los puntajes obtenidos en la prueba A y en la prueba B?

I) Sus promedios son iguales.

II) Sus medianas son distintas.

III) La desviación estándar de los puntajes obtenidos en la prueba B es mayor que la de los puntajes obtenidos en la prueba A.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo III

D) Solo I y III

E) I, II y III

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se deben determinar cuál o cuáles de las afirmaciones es verdadera, por lo que se analizará la información entregada en cada uno de los gráficos para posteriormente compararlos.

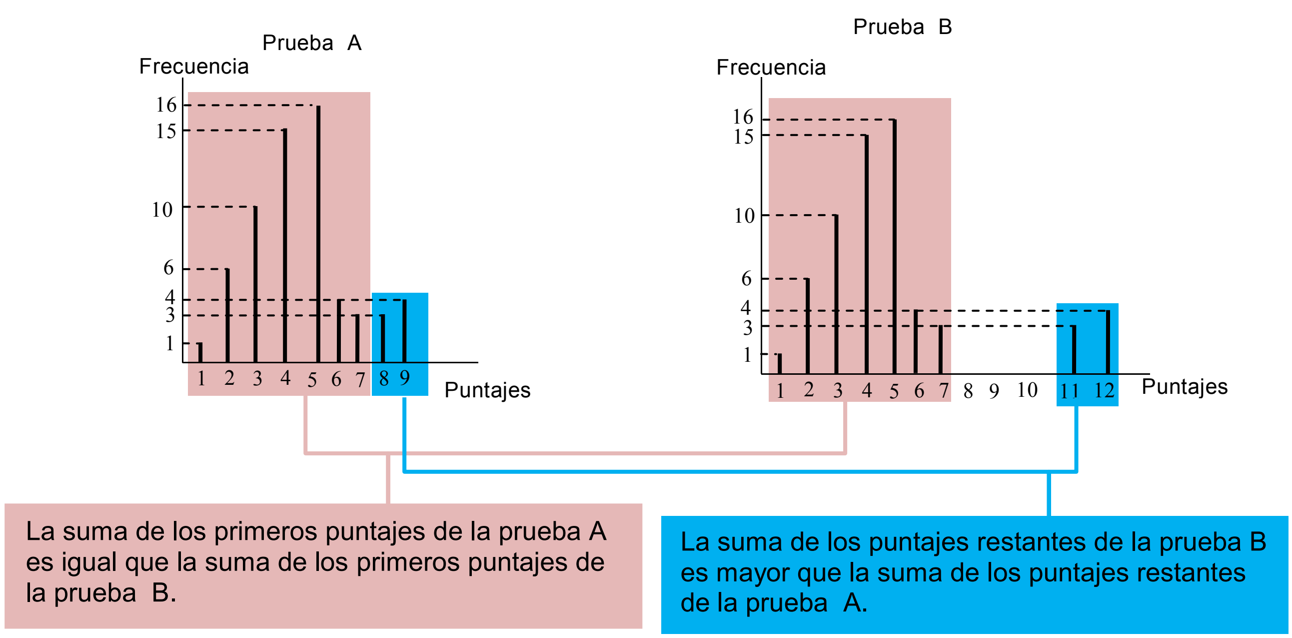
Recuerde que:

◊ el promedio de un grupo de datos corresponde a la suma de todos los datos divididos por la cantidad total de datos.

◊ la mediana de un grupo de datos ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual, aproximadamente, el 50% de los valores son menores o iguales a él y, aproximadamente, el 50% de los valores son mayores o iguales a él.

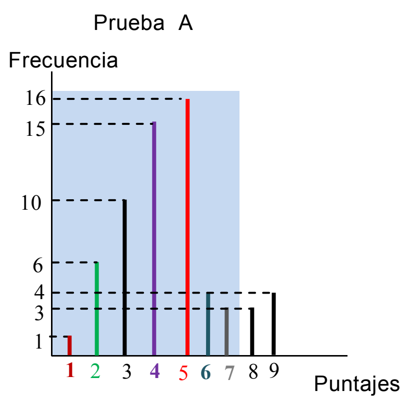
◊ la desviación estándar de un grupo de datos corresponde a un valor mayor o igual que cero, que indica qué tan separados del promedio se encuentra cada uno de los datos de dicho grupo. Lo anterior permite establecer que entre más separados estén cada uno de los datos del promedio, mayor será el valor de la desviación estándar, con lo cual se dice que los datos están más dispersos respecto al promedio.

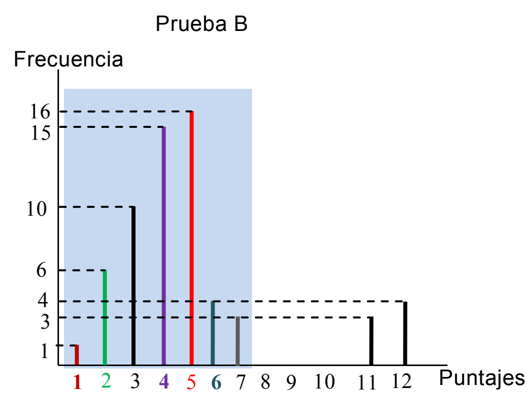
De los gráficos se puede observar lo siguiente:



Por lo tanto, la suma de los puntajes de la prueba B es mayor que la suma de los puntajes de la prueba A. Como la cantidad de puntajes en ambas pruebas es la misma se deduce que el promedio de los puntajes de la prueba A es menor que el promedio de los puntajes de la prueba B, siendo la afirmación en I) falsa.

En II), se afirma que la mediana los puntajes de la prueba A y la de los puntajes de la prueba B son distintas, lo cual es falso, puesto que en los gráficos se puede apreciar lo siguiente:





La distribución de los puntajes de la prueba A y de la prueba B hasta el puntaje 7 es la misma, además hasta el puntaje 7 se ha acumulado más del 50% de los puntajes en ambas pruebas.

Luego, se concluye que la mediana es la misma en ambas pruebas.

Para determinar si la afirmación en III) es verdadera, se debe considerar que la distribución de los puntajes hasta el puntaje 7 es la misma en ambas pruebas. Sin embargo, los últimos dos puntajes de la prueba B son mayores a los dos últimos puntajes de la prueba A, esto significa que los puntajes de la prueba B están a mayor distancia de su promedio que en el caso de la prueba A, por lo tanto, se puede concluir que la desviación estándar de los puntajes de la prueba B es mayor que la desviación estándar de los puntajes de la prueba A.

Por lo anterior, la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar
Área Temática: Datos
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.
Contenido: Análisis de las características de dos muestras
Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar
Clave: C

PREGUNTA 68

Un grupo de 2.000 estudiantes de un liceo obtuvo en promedio 575 puntos en una prueba, con una desviación estándar de 100 puntos. Los puntajes de la prueba obtenidos por estos estudiantes se modelan a través de una distribución normal. Según este modelo, ¿cuál es el número de estudiantes que obtuvo al menos 475 puntos y como máximo 775 puntos?

A) 1.636

B) 818

C) 977

D) 300

E) 1.136

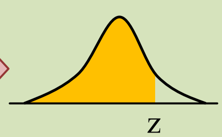
RESOLUCIÓN

Una manera de resolver este ítem es definir una variable aleatoria X como los puntajes obtenidos por los estudiantes en la prueba, para luego determinar el porcentaje de estudiantes que tiene puntajes entre 475 puntos y 775 puntos.

Recuerde que:

si una población de tamaño n, se modela con una variable aleatoria continua tal que $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ y se considera $Z \sim N(0, 1)$, entonces se cumple que:

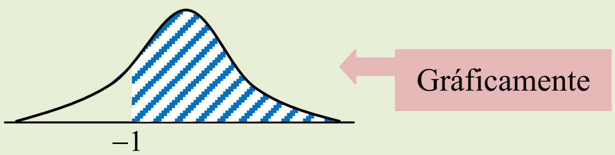
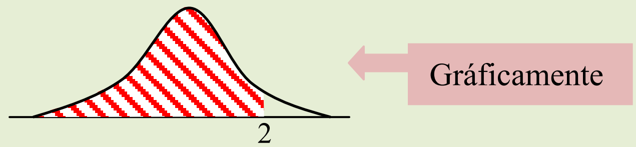
$$P(Y \leq y) = P\left(Z \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$



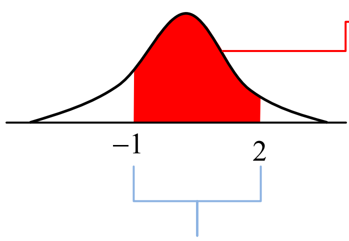
La cantidad de elementos de la población que tienen un valor menor o igual a x es $n \cdot P(X \leq x)$

$$P(Y \geq y) = P\left(Z \geq \frac{y-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P(Y \leq y)$$

Del enunciado se tiene $X \sim N(575,\ 100^2)$, luego, se puede determinar $P(X \geq 475)$ y $P(X \leq 775)$ de la siguiente manera:

$P(X \geq 475)$	$P(X \leq 775)$
$P(X \geq 475) = P\left(Z \geq \frac{475 - 575}{100}\right) = P(Z \geq -1)$	$P(X \leq 775) = P\left(Z \leq \frac{775 - 575}{100}\right) = P(Z \leq 2)$
	

Por lo que la cantidad de estudiantes que tienen un puntaje entre 475 puntos y 775 puntos se representa en el siguiente gráfico:



La cantidad de estudiantes que tienen entre 475 y 775 puntos es: $2.000 \cdot P(-1 \leq Z \leq 2)$

$P(-1 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$

Como $P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(-1 \leq Z \leq 2) &= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1) \\ &= P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 1)) \end{aligned}$$

De la tabla que está en la contratapa de este modelo, se tiene que $P(Z \leq 2) = 0{,}977$ y $P(Z \leq 1) = 0{,}841$, luego:

$$\begin{aligned} P(-1 \leq Z \leq 2) &= P(Z \leq 2) - (1 - P(Z \leq 1)) \\ &= 0{,}977 - (1 - 0{,}841) \\ &= 0{,}818 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad de estudiantes que obtuvo al menos 475 puntos y como máximo 775 puntos es $2.000 \cdot 0{,}818 = 1.636$, siendo la clave A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Evaluar críticamente información estadística extraída desde medios de comunicación, tales como periódicos, artículos de revistas o desde Internet.

Contenido: Distribución normal

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 69

En la escala de notas que utiliza un colegio la nota mínima es un 1 y la nota máxima es un 7. Se puede determinar el rango de las notas obtenidas por los estudiantes de este colegio en una prueba, si se sabe que:

(1) tres estudiantes obtuvieron la nota máxima al que podría llegar en la prueba.

(2) el promedio entre la nota más alta alcanzada en la prueba y la nota más baja obtenida, es 4.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

RESOLUCIÓN

Para dar solución a este ítem se debe determinar si con las informaciones dadas en el enunciado, en (1) y/o en (2) se puede determinar el rango de las notas obtenidas por los estudiantes en una prueba.

Recuerde que:

◊ el rango de un conjunto de datos, es un valor que se obtiene restando al valor máximo del conjunto de datos el valor mínimo de dicho conjunto de datos.

◊ el promedio de un conjunto de datos, corresponde a la suma de todos los datos divididos por la cantidad total de datos.

La información que se entrega en (1) indica que tres estudiantes obtuvieron la nota máxima, por lo tanto, se conoce la nota máxima, pero no la menor, por lo que no se puede determinar el rango.

En la información entregada en (2) se indica que el promedio entre la nota más alta y la más baja es un 4, esto se puede expresar como $\frac{\text{nota máxima} + \text{nota mínima}}{2} = 4$, por lo que esta información entrega el valor de la suma entre la nota máxima y la nota mínima alcanzada en la prueba, pero no la resta entre ellas, por lo que con esta información por sí sola no se puede determinar el rango.

Ahora, si se consideran juntas la información en (1) y en (2), se tiene que en (1) se entrega la nota máxima alcanzada y en (2) se tiene la expresión $\text{nota máxima} + \text{nota mínima} = 8$, por lo que al reemplazar la nota máxima alcanzada en esta expresión se puede determinar la nota mínima y así determinar el rango del grupo de notas, por lo que la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar
Área Temática: Datos
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.
Contenido: Medidas de tendencia central y de dispersión
Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar
Clave: C

PREGUNTA 70

Las n personas de un grupo salen al mismo tiempo y desde un mismo lugar hacia un punto determinado. Al término del recorrido estas personas deben pasar, de una en una, por una misma puerta. Si durante el trayecto se retira la décima parte de las personas que salieron del lugar, no reintegrándose al grupo, ¿de cuántas formas distintas se pueden ordenar para cruzar por la puerta las personas que completan el recorrido?

A) $n! - \frac{n}{10}$

B) $n! - \frac{n}{10}!$

C) $\left(n - \frac{n}{10}\right)!$

D) $\left(n - \frac{1}{10}\right)!$

E) $n! - \frac{1}{10}$

RESOLUCIÓN

Para determinar la cantidad de formas distintas en las que se pueden ordenar las personas al cruzar por la puerta, se debe recordar que:

> el número de formas en las que se pueden ordenar n elementos distintos es igual al factorial de n, es decir, $n!$.

Del enunciado se tiene que durante el trayecto se retira la décima parte de los competidores, de esta manera la cantidad de personas que completó el recorrido es $\left(n - \frac{n}{10}\right)$.

La cantidad de formas distintas en que se pueden ordenar para cruzar por la puerta las personas que completan el recorrido es $\left(n - \frac{n}{10}\right)!$, por lo que la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Primero medio

Objetivo Fundamental: Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarlo al cálculo de probabilidades en diversas situaciones.

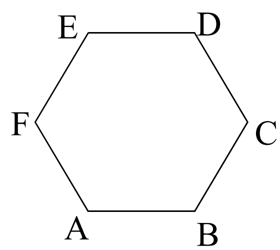
Contenido: Uso de técnicas combinatorias para resolver diversos problemas

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 71

En el hexágono regular de la figura adjunta se marcan al azar tres de sus vértices.



¿Cuál es la probabilidad de que con estos vértices se forme un triángulo equilátero?

A) $\frac{1}{10}$

B) $\frac{3}{10}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar la cantidad total de triángulos que se pueden formar con los vértices del hexágono y cuántos de ellos son triángulos equiláteros, para posteriormente aplicar el modelo de Laplace.

Recuerde que:

◊ la probabilidad de ocurrencia de un suceso en el modelo de Laplace es igual a $\frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}}$.

◊ la cantidad de muestras de tamaño k que se pueden extraer desde una población de m elementos es $\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)! \cdot k!}$.

◊ el factorial de un numero p, es $p! = p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \cdot \ldots \cdot 1$.

La cantidad de casos posibles corresponde a todos los triángulos distintos que se pueden formar al unir tres de los seis vértices del hexágono, es decir, $\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = 20$.

Por otro lado, la cantidad de triángulos equiláteros que se pueden formar son dos, tal como se muestra a continuación.

De esta manera, al aplicar el modelo de Laplace se obtiene que la probabilidad de que al marcar al azar tres de sus vértices estos formen un triángulo equilátero es $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, por lo que la clave es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar
Área Temática: Azar
Nivel: Primero medio
Objetivo Fundamental: Seleccionar la forma de obtener la probabilidad de un evento, ya sea en forma teórica o experimentalmente, dependiendo de las características del experimento aleatorio.
Contenido: Cálculo de probabilidades mediante el modelo de Laplace
Habilidad Cognitiva: Aplicar
Clave: A

PREGUNTA 72

En un curso de 90 estudiantes, $\frac{2}{5}$ obtuvieron buenos resultados en el examen de matemática, $\frac{13}{30}$ en el examen de lenguaje y $\frac{1}{9}$ en ambos. Si se selecciona a un estudiante al azar de este curso, ¿cuál es la probabilidad de que este tenga un buen resultado en solo un examen?

A) $\frac{1}{36} + \frac{1}{39}$

B) $\frac{1}{55}$

C) $\frac{55}{90}$

D) $\frac{1}{75}$

E) $\frac{26}{150}$

RESOLUCIÓN

Para determinar la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar del curso, este tenga buenos resultados en solo un examen, se definirán los siguientes sucesos:

R: obtener buenos resultados en matemática.

Q: obtener buenos resultados en lenguaje.

$R \cap Q$: obtener buenos resultados en matemática y en lenguaje.

La probabilidad de seleccionar al azar a un estudiante que solo obtuvo buenos resultados en matemática es $P(R) - P(R \cap Q) = \frac{2}{5} - \frac{1}{9} = \frac{13}{45}$.

Del mismo modo, la probabilidad de seleccionar al azar a un estudiante que solo obtuvo buenos resultados en lenguaje es $P(Q) - P(R \cap Q) = \frac{13}{30} - \frac{1}{9} = \frac{29}{90}$.

Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar al azar a un estudiante que solo obtuvo buenos resultados en matemática o solo obtuvo buenos resultados en lenguaje es $\frac{13}{45} + \frac{29}{90} = \frac{55}{90}$, por lo que la clave es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar
Área Temática: Azar
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Aplicar propiedades de la suma y producto de probabilidades, en diversos contextos, a partir de la resolución de problemas que involucren el cálculo de probabilidades.
Contenido: Suma de probabilidades
Habilidad Cognitiva: Aplicar
Clave: C

PREGUNTA 73

En una caja hay 8 bolitas, todas del mismo tipo, numeradas con números positivos múltiplos de 3 y menores que 10. Si en el experimento de extraer simultáneamente dos bolitas de la caja, se define la variable aleatoria discreta X como la suma de los números obtenidos, ¿cuál de los siguientes conjuntos **NO** es un posible recorrido de X?

A) $\{6\}$

B) $\{3, 6, 9\}$

C) $\{6, 9, 12\}$

D) $\{6, 9, 12, 15, 18\}$

E) $\{12, 15, 18\}$

RESOLUCIÓN

Del enunciado se tiene que una caja contiene 8 bolitas, todas del mismo tipo, donde cada una de ellas puede estar numerada con números positivos múltiplos de 3 y menores que 10, es decir, 3, 6 ó 9.

En el experimento de extraer simultáneamente dos bolitas de la caja se ha definido la variable aleatoria X como la suma de los números obtenidos.

Ahora, como el menor número con el que podrían estar numeradas las bolitas es el 3 y se deben extraer dos bolitas simultáneamente, el menor valor que se puede obtener de la suma es el 6, por lo que el conjunto $\{3, 6, 9\}$ no se puede obtener.

De lo anterior, la opción B) es la clave.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Segundo medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Variable aleatoria discreta

Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar

Clave: B

PREGUNTA 74

En una fábrica de cajeros automáticos la probabilidad de que uno de ellos tenga una falla en su pantalla es $\frac{r}{s}$. Para un control de calidad se seleccionan al azar 10 de estos cajeros de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan una falla en su pantalla?

A) $\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{r}{s}\right)^7$

B) $3 \cdot \frac{r}{s}$

C) $\left(\frac{r}{s}\right)^3$

D) $\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{s}{r}\right)^7$

E) Ninguna de las anteriores

RESOLUCIÓN

Del enunciado se tiene que la probabilidad de que uno de los cajeros automático tenga una falla es $\frac{r}{s}$ y se seleccionan 10 de estos cajeros al azar. Luego, para resolver esta pregunta se utiliza el modelo binomial.

Recuerde que:

en un modelo binomial, al repetirse de manera independiente N veces un experimento aleatorio con resultados dicotómicos (éxito o fracaso), se tiene que, si la probabilidad de tener éxito en el experimento es p y la probabilidad de tener fracaso en el mismo experimento es $q = 1 - p$, entonces la probabilidad de obtener exactamente k éxitos, en las N repeticiones, con $0 \leq k \leq N$, está dada por la expresión: $\binom{N}{k} p^k \cdot q^{N-k}$.

Así, $N = 10$ es la cantidad de cajeros seleccionados, $k = 3$ es la cantidad de cajeros que exactamente tengan una falla, $p = \frac{r}{s}$ es la probabilidad de que un cajero tenga una falla y $q = \left(1 - \frac{r}{s}\right)$ la probabilidad de que el cajero no tenga una falla.

De esta manera, la probabilidad de que se tenga una falla en exactamente 3 cajeros se puede expresar como:

$$\binom{N}{k} p^k \cdot q^{N-k} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{r}{s}\right)^{10-3} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{r}{s}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{r}{s}\right)^7$$

Expresión que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar
Área Temática: Azar
Nivel: Tercero medio
Objetivo Fundamental: Aplicar el concepto de modelo probabilístico para describir resultados de experimentos binomiales.
Contenido: Modelo binomial
Habilidad Cognitiva: Comprender
Clave: A

PREGUNTA 75

Se hace una encuesta a un grupo de personas y se les consulta si consumen azúcar o si consumen miel. Los resultados obtenidos se resumen en la tabla adjunta.

	Azúcar	Miel
Hombres	25	9
Mujeres	10	18

Si del grupo se elige una persona al azar, resultando que es hombre y ninguno de los encuestados consume ambos productos, ¿cuál es la probabilidad de que consuma miel?

A) $\frac{27}{34}$

B) $\frac{27}{62}$

C) $\frac{34}{62}$

D) $\frac{9}{34}$

E) $\frac{9}{62}$

RESOLUCIÓN

Una manera de resolver este ítem es aplicando la probabilidad condicional.

Recuerde que:

◊ la probabilidad de ocurrencia de un suceso en el modelo de Laplace es igual a $\frac{\text{Cantidad de casos favorables}}{\text{Cantidad de casos posibles}}$.

◊ la probabilidad condicional consiste en la probabilidad de ocurrencia de un suceso A dado la ocurrencia de un suceso B, la cual se escribe como $P(A/B)$ y se calcula como $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, donde $P(B)$ es la probabilidad de que ocurra B, $P(B) \neq 0$ y $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que ocurra A y B.

De esta forma al seleccionar un encuestado al azar, se pueden definir los siguientes sucesos:

A: La persona consume miel.

B: La persona es hombre.

$(A \cap B)$: La persona consume miel y es hombre.

De la tabla se pueden determinar todos los casos posibles y los casos favorables para calcular $P(B)$ y $P(A \cap B)$, como se muestra a continuación:

	Azúcar	Miel
Hombres	25	9
Mujeres	10	18

$\# B = 25 + 9 = 34$

$\# (A \cap B) = 9$

La cantidad total de casos posibles corresponde a la cantidad de personas encuestadas, es decir, $25 + 9 + 10 + 18 = 62$. Ahora,

$$P(B) = \frac{34}{62}$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{62}$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{9}{62}}{\frac{34}{62}} = \frac{9}{\cancel{62}} \cdot \frac{\cancel{62}}{34} = \frac{9}{34}$$

Por lo que la clave es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de probabilidad condicional y aplicarlo en diversas situaciones que involucren el cálculo de probabilidades.

Contenido: Probabilidad condicional

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

PREGUNTA 76

En la tabla adjunta se muestra la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X.

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	2m	3m	4m	2m	m

¿Cuál es el valor numérico de $P(X \leq 3)$?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{5}{12}$

D) $\frac{1}{12}$

E) Indeterminable con los datos dados

RESOLUCIÓN

Para determinar el valor numérico de $P(X \leq 3)$ se debe recordar que:

para X una variable aleatoria discreta con recorrido $\{x_1, x_2, x_3, x_4,..., x_n\}$, donde n es un número entero positivo se cumple que:

◊ la suma de las probabilidades de cada elemento del recorrido de X es 1, es decir, $P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) + \ldots + P(X = x_n) = 1$

◊ su función de distribución de probabilidad acumulada es $P(X \leq x)$, y se tiene que:

$$P(X \leq x_1) = P(X = x_1)$$
$$P(X \leq x_2) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$$
$$P(X \leq x_3) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3)$$
$$P(X \leq x_4) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4)$$
$$\ldots$$
$$P(X \leq x_n) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) + \ldots + P(X = x_n) = 1$$

Como X es una variable aleatoria discreta con recorrido los números 1, 2, 3, 4 y 5, se tiene que:

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 1$$

$$2m + 3m + 4m + 2m + m = 1$$

$$12m = 1$$

$$m = \frac{1}{12}$$

Ahora, $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 2m + 3m + 4m = 9m = 9 \cdot \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$, probabilidad que se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Función de distribución de probabilidad

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 77

Se realiza el experimento aleatorio de lanzar dos veces un dado común. Si se define la variable aleatoria Y como la suma de los puntos obtenidos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $P(Y = 6) = P(Y = 8)$

B) $P(Y = 1) = \frac{1}{6}$

C) $P(Y = 4) > P(Y = 11)$

D) $P(Y < 7) = P(Y > 7)$

E) $P(Y \leq 4) = \frac{1}{6}$

RESOLUCIÓN

Una forma de resolver este ítem es como se muestra a continuación:

Del enunciado se tiene que en el experimento de lanzar dos veces un dado común se define la variable aleatoria Y como la suma de los puntos obtenidos.

En la siguiente tabla se muestran los posibles resultados para Y.

Suma		Dado 2do lanzamiento					
		1	2	3	4	5	6
Dado 1er lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Luego, el recorrido de Y es $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Como el 1 no pertenece al recorrido de Y se tiene que $P(Y = 1) = 0$, así, la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

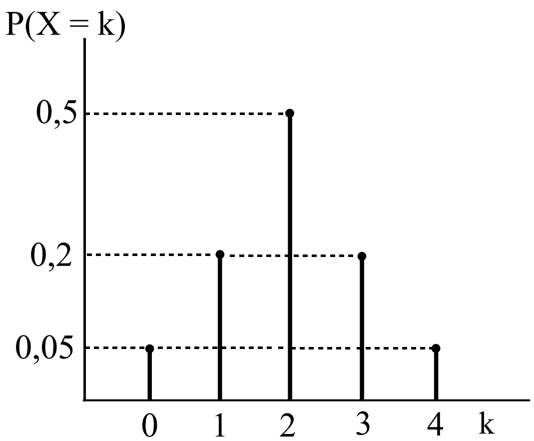
Contenido: Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

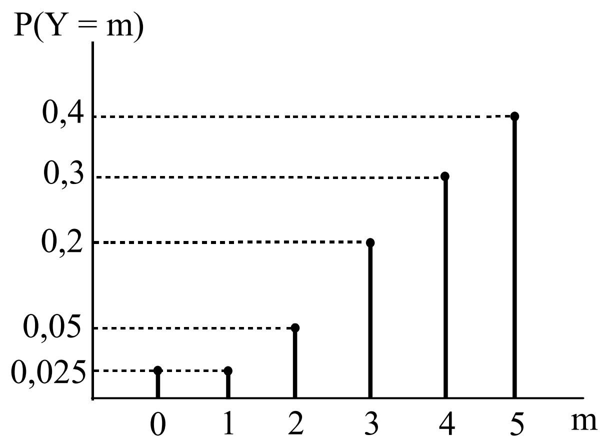
Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: B

PREGUNTA 78

Los gráficos de la figura adjunta muestran las funciones de probabilidad de las variables aleatorias discretas X e Y.





¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera, con respecto a estos gráficos?

A) $P(X \leq 2) < P(Y \leq 2)$

B) La desviación estándar de Y es menor que la desviación estándar de X.

C) El valor esperado de X es mayor que el valor esperado de Y.

D) El valor esperado de Y es 5.

E) El valor esperado de X es 2.

RESOLUCIÓN

Para determinar cuál de las afirmaciones es verdadera se utilizarán los datos de los gráficos.

La afirmación en A) es falsa, pues

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}05 + 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}75$ y
$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0{,}025 + 0{,}025 + 0{,}05 = 0{,}1$

Recuerde que:

para una variable aleatoria discreta X cuyo recorrido es $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,..., x_n\}$

- ◊ el valor esperado $E(X)$ se calcula como $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$.
- ◊ su desviación estándar se calcula como $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \cdot P(X = x_i) - (E(X))^2}$.

De esta forma:

El valor esperado de X es $0 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}05 = 2$ Por lo tanto, E) es verdadera.	El valor esperado de Y es $0 \cdot 0{,}025 + 1 \cdot 0{,}025 + 2 \cdot 0{,}05 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}4 = 3{,}925$ Por lo tanto, D) es falsa.
Como el valor esperado de X es menor que el valor esperado de Y, la opción C) es falsa.	
La desviación estándar de X es $\sqrt{0^2 \cdot 0{,}05 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}5 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}05 - (2)^2}$ $= \sqrt{4{,}8 - 4}$ $= \sqrt{0{,}8}$	La desviación estándar de Y es $\sqrt{0^2 \cdot 0{,}025 + 1^2 \cdot 0{,}025 + 2^2 \cdot 0{,}05 + 3^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}3 + 5^2 \cdot 0{,}4 - (3{,}925)^2}$ $= \sqrt{16{,}825 - (3{,}925)^2}$ $= \sqrt{1{,}419375}$
Así, la afirmación en B) es falsa.	

Por lo anterior, la clave es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Valor esperado de una variable aleatoria discreta

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 79

Si Z es una variable aleatoria continua tal que $Z \sim N(0, 1)$, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

A) $P(Z \geq 1) = P(Z \geq -1)$

B) $P(Z \geq 1) = P(Z \leq -1)$

C) $P(Z \leq 2) > P(Z \geq -3)$

D) $P(2 \leq Z \leq 3) > P(-3 \leq Z \leq -2)$

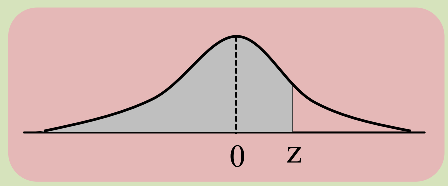
E) $P(-1 \leq Z \leq 0) = P(1 \leq Z \leq 2)$

RESOLUCIÓN

Una forma de resolver este ítem es representar las probabilidades que se presentan en cada una de las opciones en el gráfico de densidad de la distribución normal para luego compararlas.

Recuerde que:

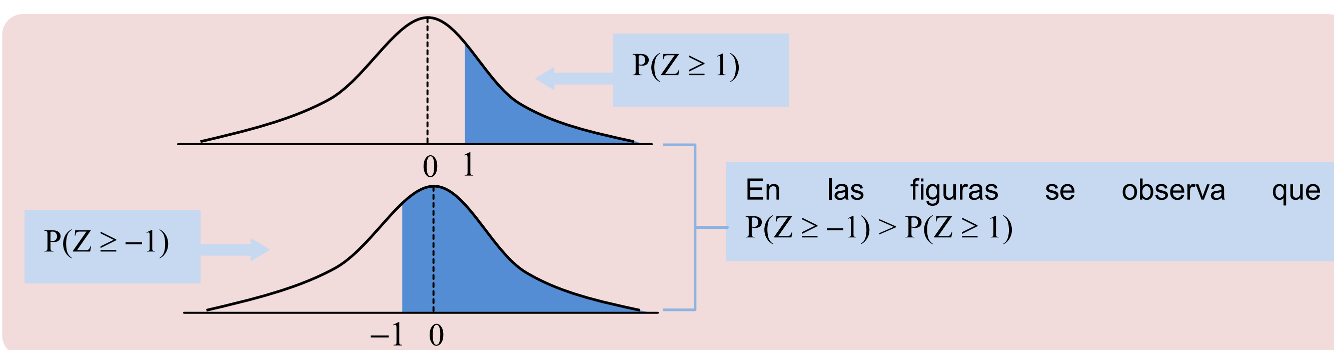
◊ para una variable aleatoria continua Z, tal que $Z \sim N(0, 1)$ la probabilidad $P(Z \leq z)$, corresponde a la parte sombreada del siguiente gráfico.



◊ una de las características del gráfico de la función densidad de la distribución normal es que es simétrica respeto a su promedio.

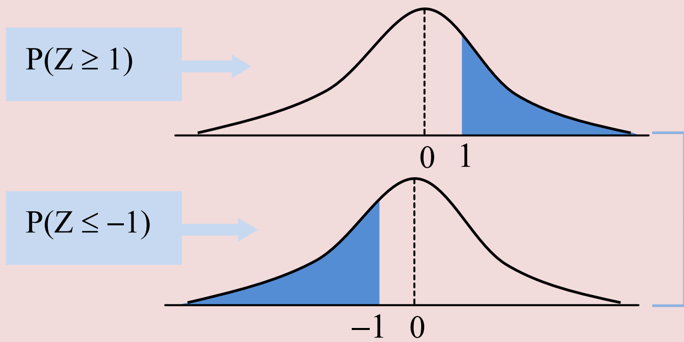
Al representar en el gráfico de la función densidad las probabilidades de las opciones se tiene lo siguiente:

En A) se tiene:



Luego, la relación en A) es falsa.

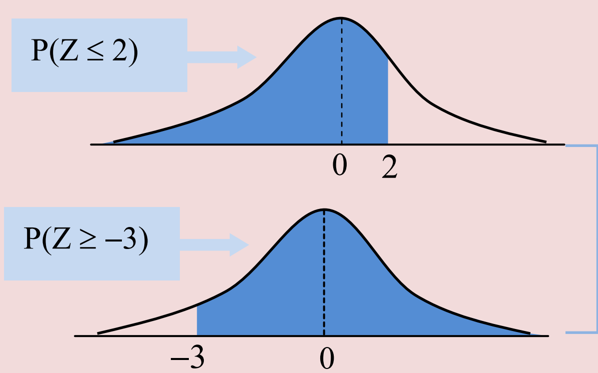
En B) se tiene:



En las figuras se observa que por simetría $P(Z \geq 1) = P(Z \leq -1)$.

Por lo que, la afirmación en B) es verdadera.

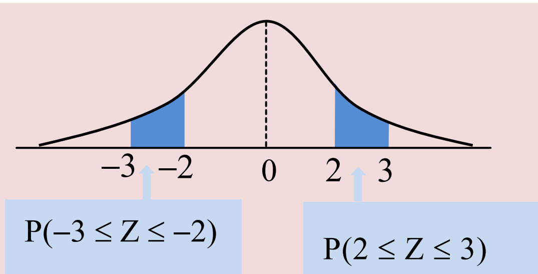
En C) se tiene:



En las figuras se observa que $P(Z \leq 2) < P(Z \geq -3)$.

Por lo tanto, la afirmación en C) es falsa.

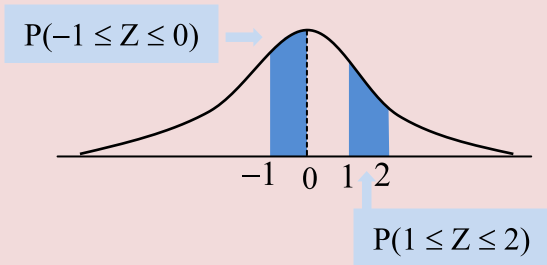
En D) se tiene:



En la figura se observa que por simetría $P(-3 \leq Z \leq -2) = P(2 \leq Z \leq 3)$.

Siendo la afirmación en D) falsa.

Por último, en E) se tiene:



En la figura se observa que $P(-1 \leq Z \leq 0) > P(1 \leq Z \leq 2)$.

Por lo tanto, la afirmación en E) también es falsa.

De lo anterior, la clave es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar

Área Temática: Azar

Nivel: Cuarto medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, para el caso de una variable aleatoria continua.

Contenido: Distribución normal

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: B

PREGUNTA 80

Se seleccionará un estudiante al azar de una muestra compuesta por estudiantes de cuarto medio de un liceo mixto. Se puede determinar la probabilidad de que el estudiante elegido al azar de la muestra sea mujer y use lentes, si se sabe que:

(1) hay igual cantidad de hombres que de mujeres en la muestra.

(2) un 60% de las mujeres de la muestra usa lentes.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

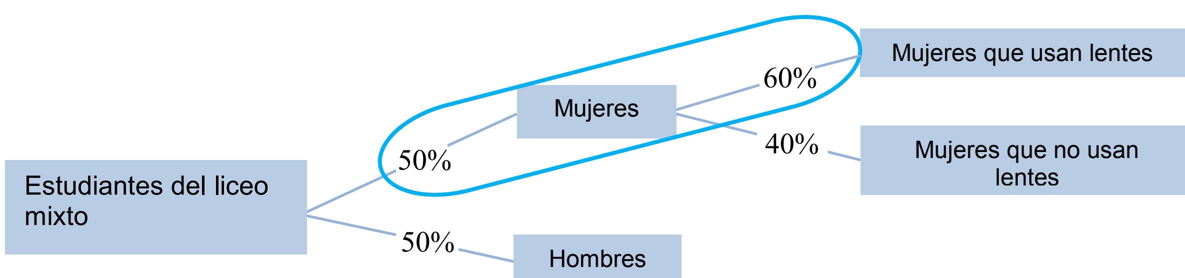
RESOLUCIÓN

Para resolver este ítem se debe determinar si con las informaciones dadas en (1) y/o en (2) se puede obtener la probabilidad de que al seleccionar al azar un estudiante de una muestra de un liceo mixto este sea mujer y use lentes.

Con la información dada en (1) no se puede determinar la probabilidad pedida, debido a que solo se indica que hay una misma cantidad de hombres y de mujeres en la muestra y nada se dice de las personas que usan lentes.

Con la información dada en (2) tampoco se puede determinar la probabilidad pedida, pues el porcentaje que se entrega no está referido al total de personas, sino que solo a la cantidad de mujeres que usa lentes.

Ahora, si se juntan ambas informaciones se puede formar el siguiente diagrama de árbol:



Por lo que, de esta representación se puede determinar la probabilidad de que al seleccionar a un estudiante del liceo mixto este sea mujer y use lentes, siendo C) la clave del ítem.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y azar
Área Temática: Azar
Nivel: Segundo medio
Objetivo Fundamental: Aplicar propiedades de la suma y producto de probabilidades, en diversos contextos, a partir de la resolución de problemas que involucren el cálculo de probabilidades.
Contenido: Producto de probabilidades
Habilidad Cognitiva: Analizar, sintetizar y evaluar
Clave: C

DEMRE

PIONEROS • EXPERTOS • CONFIABLES