PRUEBA DE
SELECCIÓN
UNIVERSITARIA

RESOLUCIÓN MODELO DE PRUEBA
MATEMÁTICA

PROCESO DE ADMISIÓN 2017

PRESENTACIÓN

En esta publicación se comentarán las preguntas que aparecen en el Modelo de Prueba de Matemática publicado el presente año, en este sitio web.

El objetivo de esta publicación es entregar información a profesores y estudiantes acerca de los temas y habilidades cognitivas que se evalúan en cada uno de los ítemes de este modelo, de manera que sirva de retroalimentación al trabajo que realizan. Para ello, se muestra una propuesta de resolución de cada pregunta, junto a una ficha de referencia curricular de cada una de ellas, explicitando el eje temático y el nivel al cual pertenece, así como también el contenido, el objetivo fundamental y la habilidad cognitiva medida, además de la clave.

Este documento ha sido elaborado por el Comité de Matemática deI Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE), dependiente de la Vicerrectoría de Asuntos Académicos de la Universidad de Chile.

COMENTARIO DE LAS PREGUNTAS

PREGUNTA 1

$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}} =$$

A) $\frac{1}{25}$

B) 2

C) $\frac{6}{125}$

D) $\frac{6}{5}$

E) $-\frac{6}{5}$

COMENTARIO

Para resolver este ítem se puede aplicar las propiedades de potencia de base racional y exponente entero, es así que se tiene la resolución:

$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}} = \frac{\frac{1}{25} + \frac{1}{5}}{\frac{5}{1}} = \left(\frac{1}{25} + \frac{5}{25}\right) \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{6}{25}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{125}$$

Recuerde que:

$$p^{-1} = \frac{1}{p}$$

Recuerde que:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Resultado que se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.

Contenido: Potencias de base racional y exponente entero.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 2

¿Cuál de los siguientes números está entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{3}$?

A) $\frac{1}{9}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{3}{14}$

E) $\frac{3}{10}$

COMENTARIO

Una manera que permite encontrar la respuesta correcta al ítem es transformar las fracciones dadas, tanto en el enunciado como las dadas en las opciones, a números decimales, dividiendo el numerador por el denominador de cada fracción, para posteriormente, verificar cuál de los números dados en las opciones se encuentra entre $\frac{1}{4} = 0{,}25$ y $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$. En efecto,

- En A) se tiene que $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$, valor que es menor que 0,25.
- En B) se tiene que $\frac{1}{5} = 0,2$, valor que es menor que 0,25.
- En C) se tiene que $\frac{4}{5} = 0,8$, valor que es mayor que $0,\overline{6}$.
- En D) se tiene que $\frac{3}{14} = 0,214285\ldots$, valor que es menor que 0,25.
- En E) se tiene que $\frac{3}{10} = 0,3$, valor que está entre 0,25 y $0,\overline{6}$.

Por lo tanto, la respuesta correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Orden de números racionales.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 3

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s), con respecto a la expresión decimal de $\frac{3}{11}$?

I) El dígito de la milésima es un número par.
II) Es un número decimal periódico.
III) El número truncado al dígito de la cienmilésima es 0,27273.

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

COMENTARIO

Para dar respuesta a la pregunta se deben comprender las afirmaciones dadas en I), en II) y en III) para determinar el valor de verdad de ellas.

Del número $\frac{3}{11}$ dado en el enunciado, se tiene que su expresión decimal es 0,2727272…, esto es, al dividir el numerador por denominador de la fracción.

La siguiente tabla indica el nombre que recibe cada dígito que conforma el número decimal.

Unidad	Décima	Centésima	milésima	Diez milésima	Cien milésima	Mil milésima	millonésima	
0	2	7	2	7	2	7	2	…

Ahora, si se observa la tabla, se tiene que el dígito de la milésima es 2, por lo tanto, la afirmación dada en I) es **verdadera**.

La afirmación dada en II) también es **verdadera**, puesto que el número $\frac{3}{11}$ es periódico, cuyo periodo es 27.

Ahora, se debe recordar que:

Para aproximar un número por **truncamiento** a un dígito decimal, se debe considerar el número hasta ese dígito decimal y se suprimen los dígitos siguientes.

En este caso, el número 0,27272727… truncado al dígito de la cienmilésima es 0,27272 número que es distinto al dado en la afirmación III), luego esta es **falsa**.

Por el análisis realizado se tiene que la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Transformación de fracción a número decimal y aproximación de números racionales por truncamiento.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: B

PREGUNTA 4

Las masas del Sol y de la Tierra, aproximadamente, son $1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg y $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, respectivamente. Con estos valores, ¿cuántas veces está contenida, aproximadamente, la masa de la Tierra en la masa del Sol?

A) $3{,}311 \cdot 10^{5}$ veces
B) $3{,}020 \cdot 10^{6}$ veces
C) $3{,}311 \cdot 10^{6}$ veces
D) $3{,}020 \cdot 10^{-6}$ veces
E) $4 \cdot 10^{6}$ veces

COMENTARIO

Una de las posibles maneras de resolver el ítem es a través de notación científica, donde se aplicará la división de potencias de base 10.

Como se pregunta las veces que está contenida, aproximadamente, la masa de la Tierra en la masa del Sol, se debe dividir la masa del Sol por la masa de la Tierra, esto es,

$$\frac{1{,}98 \cdot 10^{30}}{5{,}98 \cdot 10^{24}}$$

Aplicando $\frac{10^{n}}{10^{m}} = 10^{(n-m)}$

$$\frac{1{,}98}{5{,}98} \cdot 10^{6}$$

Realizando la división 1,98:5,98 se tiene, aproximadamente,

$$0{,}3311 \cdot 10^{6}$$

Escribiendo 0,3311 en notación científica se tiene

$$3{,}311 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{6}$$

Aplicando $10^{n} \cdot 10^{m} = 10^{(n+m)}$

$$3{,}311 \cdot 10^{5}$$

Resultado que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.

Contenido: Resolución de problemas en contextos que involucran potencias de base racional y exponente entero.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 5

Una persona viaja desde La Serena a Los Vilos, ciudades que se encuentran a una distancia de 210 km. Si en los tres primeros días recorre $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{21}$ y $\frac{7}{30}$ de esa distancia, respectivamente, ¿a cuántos kilómetros de Los Vilos se encuentra al término del tercer día de iniciado el viaje?

A) A 49 km

B) A 51 km

C) A 100 km

D) A 110 km

E) A 159 km

COMENTARIO

En este problema contextualizado se debe comprender el enunciado para luego aplicar la operatoria de números racionales, esto es, determinar la fracción de un número, la suma y la resta de números racionales.

Así, del enunciado se tiene que entre La Serena y Los Vilos hay 210 km y que la persona recorre en tres días partes del total de esa distancia, como se indica a continuación:

Primer día recorre $\frac{3}{7}$ de 210, lo que equivale a $\frac{3}{7}\cdot 210$ → **$(210:7)\cdot 3$** → **90 km**

Segundo día recorre $\frac{2}{21}$ de 210, lo que equivale a $\frac{2}{21}\cdot 210$ → **$(210:21)\cdot 2$** → **20 km**

Tercer día recorre $\frac{7}{30}$ de 210, lo que equivale a $\frac{7}{30}\cdot 210$ → **$(210:30)\cdot 7$** → **49 km**

Ahora, para determinar a cuántos kilómetros la persona se encuentra de Los Vilos se deben sumar las tres distancias obtenidas y restárselas al total de kilómetros que hay entre las dos ciudades.

Esto es, **90 km** + **20 km** + **49 km** = **159 km**

Luego, lo que le queda por recorrer para llegar a Los Vilos es **210 – 159 = 51 km**, por lo tanto, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Resolución de problemas en contextos que involucran números racionales.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 6

Se tiene un círculo de área 64 cm^2. Si el radio del círculo se duplica cada 2 minutos, entonces el área del círculo obtenido a los 50 minutos será

A) $2^{25} \cdot 64\ cm^2$

B) $2 \cdot 64 \cdot 50\ cm^2$

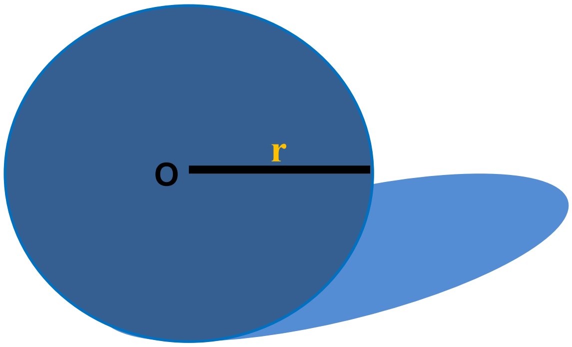
C) $2 \cdot 64 \cdot 25\ cm^2$

D) $2^{50} \cdot 64\ cm^2$

E) $64 \cdot 25\ cm^2$

COMENTARIO

En este problema el postulante debe comprender el enunciado, recordar la fórmula del área de un círculo y escribir una expresión matemática, a través de potencias de base racional y exponente entero.



Recuerde que el **área** de un **círculo** está dada por la fórmula

$$A = \pi \cdot r^2$$

Del enunciado se tiene que el área de un círculo es 64 cm^2 y usando la fórmula se tiene la igualdad $\pi r^2 = 64$.

Ahora, se señala que el radio del círculo se duplica cada 2 minutos hasta los 50 minutos, esto se muestra en la siguiente tabla:

Minutos (t)	Radio	Área
2	$2 \cdot r$	$\pi(2 \cdot r)^2 = \pi \cdot 2^{2} \cdot r^2$
4	$2^2 \cdot r$	$\pi(2^2 \cdot r)^2 = \pi \cdot 2^{4} \cdot r^2$
6	$2^3 \cdot r$	$\pi(2^3 \cdot r)^2 = \pi \cdot 2^{6} \cdot r^2$
8	$2^4 \cdot r$	$\pi(2^4 \cdot r)^2 = \pi \cdot 2^{8} \cdot r^2$
…	…	…
50	$2^{25} \cdot r$	$\pi(2^{25} \cdot r)^2 = \pi \cdot 2^{50} \cdot r^2$

Si se observa la regularidad de la tabla, la cantidad de minutos pares corresponde al exponente de 2 en la expresión $\pi 2^t r^2$, luego aplicando la fórmula de área del círculo con radio $2^{25}\cdot r$ se tiene que

$$A = \pi\cdot(2^{25}\cdot r)^2$$

Recuerde que:
$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$ y $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

Expresión que es igual a

$$A = \pi\cdot 2^{50}\cdot r^2$$

Pero como $\pi r^2 = 64$, se tiene que el área pedida es

$$A = 2^{50}\cdot 64$$

Expresión que se encuentra en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.

Contenido: Resolución de problemas en contextos que involucran potencias de base racional y exponente entero.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

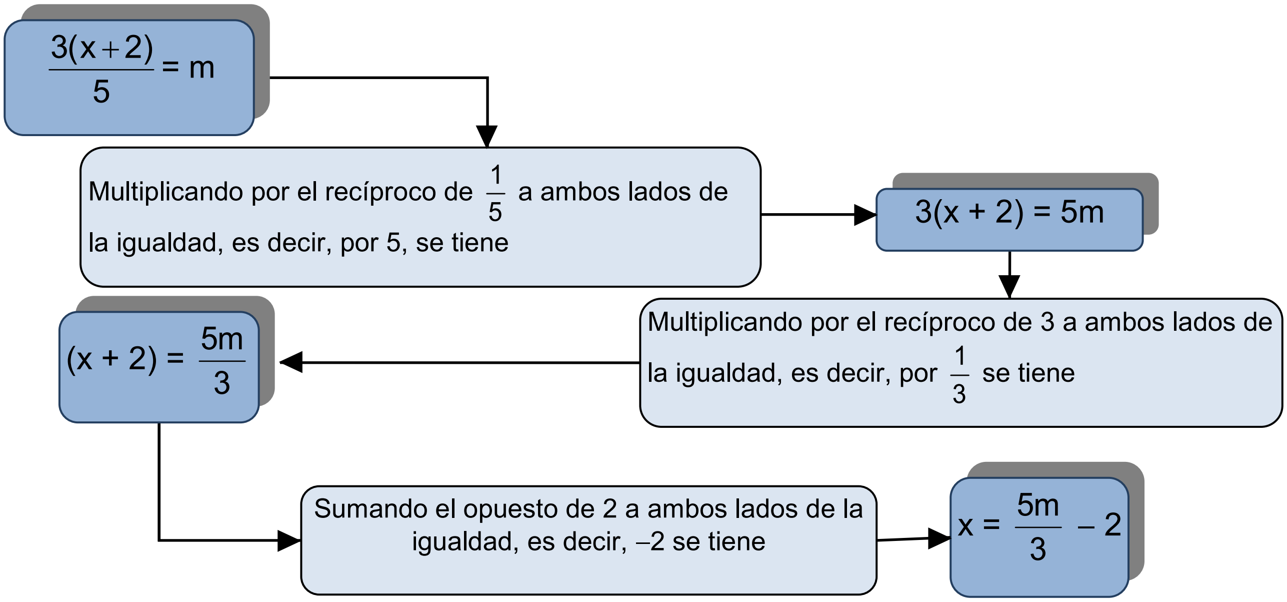
PREGUNTA 7

Sea m un número entero. Para que la solución, en x, de la ecuación $\frac{3(x+2)}{5}$ = m sea **siempre** un número entero, el valor de m, debe ser

A) un múltiplo de 5.
B) un múltiplo de 2.
C) un múltiplo de 3.
D) 1
E) –1

COMENTARIO

Para resolver este ítem, se puede despejar x en la ecuación $\frac{3(x+2)}{5}$ = m, y luego analizar los posibles valores de m para los cuales x sea **siempre** un número entero.



$\frac{3(x+2)}{5} = m$

Multiplicando por el recíproco de $\frac{1}{5}$ a ambos lados de la igualdad, es decir, por 5, se tiene

$3(x + 2) = 5m$

Multiplicando por el recíproco de 3 a ambos lados de la igualdad, es decir, por $\frac{1}{3}$ se tiene

$(x + 2) = \frac{5m}{3}$

Sumando el opuesto de 2 a ambos lados de la igualdad, es decir, –2 se tiene

$x = \frac{5m}{3} - 2$

Ahora, para que x sea siempre un número entero se debe cumplir que $\frac{5m}{3}$ debe ser un número entero y para que esto ocurra, m debe ser un número múltiplo de 3.

Así, la opción correcta de la pregunta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números racionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números enteros y caracterizarlos como aquellos que pueden expresarse como un cuociente de dos números enteros con divisor distinto de cero.

Contenido: Situaciones que muestran la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros al conjunto de los números racionales.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: C

PREGUNTA 8

Sea la ecuación $px + q = r$, en x, donde p, q y r son números enteros, con $p \neq 0$. Se puede determinar que la solución de la ecuación es un número racional **NO** entero, si se sabe que:

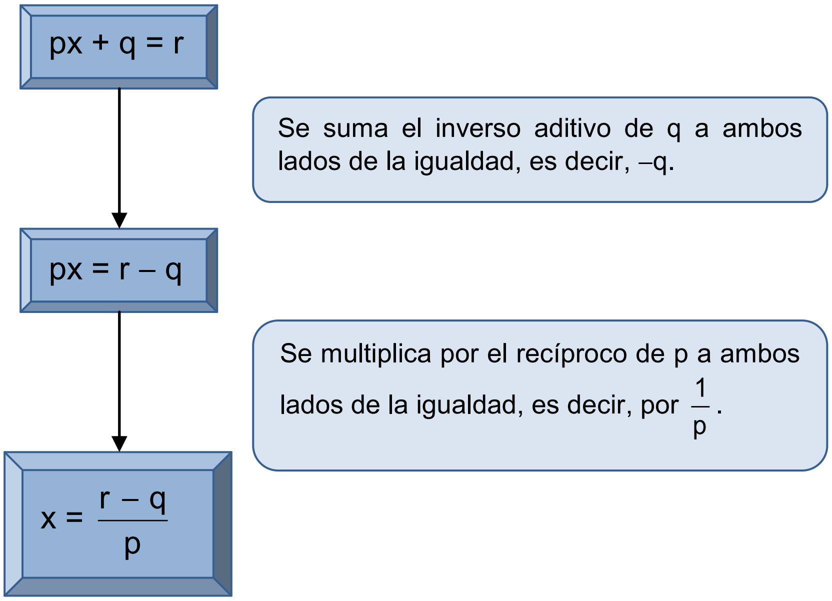
(1) $(r - q)$ es mayor que p.
(2) $(r + q)$ es múltiplo de p.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

COMENTARIO

En esta pregunta se debe decidir si con los datos proporcionados, tanto en el enunciado como en las afirmaciones (1) y (2), se pueda llegar a la solución del problema, en este caso verificar si son suficientes para determinar si la solución de la ecuación es un número racional **NO** entero.

Lo primero que se puede realizar es despejar x en la ecuación px + q = r, esto es,



$px + q = r$

Se suma el inverso aditivo de q a ambos lados de la igualdad, es decir, –q.

$px = r - q$

Se multiplica por el recíproco de p a ambos lados de la igualdad, es decir, por $\frac{1}{p}$.

$x = \frac{r - q}{p}$

Así, con la información dada en (1), que señala que (r – q) es mayor que p, no se puede determinar que $\frac{r - q}{p}$ sea un número racional **NO** entero, pues si (r – q) es 8 y p es 4, la fracción $\frac{r - q}{p}$ es igual a 2, número que es entero.

El mismo análisis se realiza con la información dada en (2), (r + q) es múltiplo de p, donde se concluye que con esta tampoco es suficiente para determinar que $\frac{r - q}{p}$ sea un número racional **NO** entero, porque si p es 4 y (r + q) es 16, se tiene como resultado un número entero.

Ahora, si se juntan ambas informaciones, es decir, cuando (r – q) es mayor que p y (r + q) es múltiplo de p, se tiene, por ejemplo, (r – q) = 8, (r + q) = 16 y p = 4, valores con los cuales no se puede determinar que la ecuación px + q = r, en x, tenga solución un número racional **NO** entero.

Por el análisis realizado la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números racionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números enteros y caracterizarlos como aquellos que pueden expresarse como un cuociente de dos números enteros con divisor distinto de cero.

Contenido: Situaciones que muestran la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros al conjunto de los números racionales.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 9

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Si P y Q son números irracionales, entonces $P \cdot Q$ es un número irracional.

II) Si P y Q son números irracionales, entonces $(P + Q)$ es un número irracional.

III) Si P es un número irracional y Q es un número entero positivo, entonces $\frac{P}{Q}$ es un número irracional.

A) Solo I

B) Solo III

C) Solo I y II

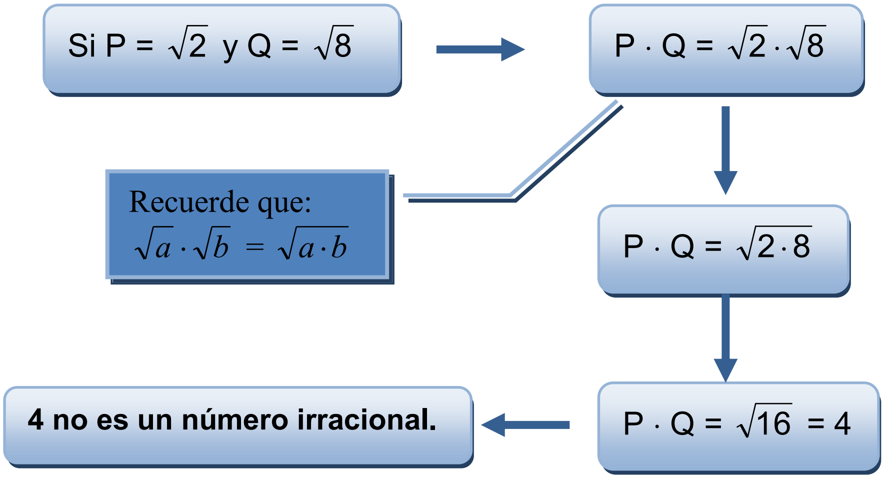
D) I, II y III

E) Ninguna de ellas.

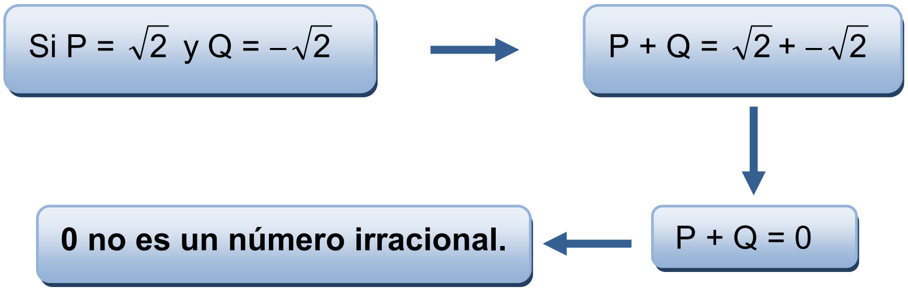
COMENTARIO

Para responder esta pregunta se deben comprender las informaciones dadas en I), en II) y en III) y determinar la veracidad de ellas, para ello se debe operar con números irracionales.

En I) se tiene que si P y Q son números irracionales, entonces (P · Q) es un número irracional, esta afirmación es **falsa**, ya que por ejemplo,



Lo mismo ocurre con la afirmación dada en II), la que indica que si P y Q son números irracionales, entonces (P + Q) es un número irracional, la cual es **falsa** porque por ejemplo,



Ahora, en III) se señala que si P es un número irracional y Q es un número entero positivo, entonces $\frac{P}{Q}$ es un número irracional, lo cual es **verdadero**, pues como Q es un número entero, se tiene que si $\frac{P}{Q}$ fuese un número racional, P tendría que ser un número racional, lo que contradice el hecho de que P es un número irracional.

De otra forma, recuerde que un número irracional tiene infinitos decimales no periódicos y que estos números no es posible escribirlos como fracción, luego al dividir un número infinito no periódico por un número entero **siempre** se obtiene un número irracional.

Por el análisis realizado se concluye que solo la afirmación III) es verdadera, luego la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números irracionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números racionales, y los números reales como aquellos que corresponden a la unión de los números racionales e irracionales.

Contenido: Números irracionales.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: B

PREGUNTA 10

Si X es la mejor aproximación por defecto a la centésima de 2,64575131 e Y es la aproximación por redondeo a la décima de 3,16227766, entonces el valor de (X + Y) es

A) 5,84
B) 5,74
C) 5,75
D) 5,85
E) 5,76

COMENTARIO

Este ítem está relacionado con la operación de números racionales y además, se utiliza aproximaciones por defecto y redondeo.

Recordar que:

Aproximación por defecto:

Implica la búsqueda de un número con una cierta cantidad de dígitos que es menor que el número dado.

Aproximación por redondeo:

Para redondear un número en un cierto dígito decimal hay que fijarse en el valor del dígito siguiente, si es mayor o igual a 5, se suma 1 al dígito a redondear, de lo contrario, el dígito se mantiene igual.

Ahora, utilizando las definiciones anteriores se tiene que:

X es la mejor aproximación por defecto a la centésima del número 2,64575131, entonces

$$X = 2{,}64$$

Y es la aproximación por redondeo a la décima de 3,16227766, entonces

$$Y = 3{,}2$$

Luego, la respuesta a la pregunta es $X + Y = 5{,}84$, resultado que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Utilizar los números reales en la resolución de problemas, ubicarlos en la recta numérica, demostrar algunas de sus propiedades y realizar aproximaciones.

Contenido: Aproximación de un número irracional por defecto y por redondeo.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 11

Si $\log \sqrt{10} = p$, $\log_q \left(\frac{27}{64}\right) = -3$ y $\log_{\frac{1}{3}} r = -2$, ¿cuál es el valor de (pqr)?

A) $\frac{1}{24}$

B) 12

C) $-\frac{27}{8}$

D) $\frac{1}{12}$

E) 6

COMENTARIO

Para determinar el valor de (pqr) se puede aplicar la definición de logaritmo en cada una de las igualdades dadas en el enunciado.

Recuerde que:

Si $\log_a b = c$, entonces $a^c = b$, con a y b números reales positivos y $a \neq 1$.

Así, se tiene que:

- De la igualdad $\log \sqrt{10} = p$, se tiene por la definición que $10^p = \sqrt{10}$, lo que es equivalente a $10^p = 10^{\frac{1}{2}}$, de donde $p = \frac{1}{2}$, ya que en una igualdad de potencias si las bases son iguales, entonces los exponentes son iguales.

- Ahora, de $\log_q \left(\frac{27}{64}\right) = -3$, se obtiene por la definición que $q^{-3} = \left(\frac{27}{64}\right)$, lo que es equivalente a $q^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$, de donde $q = \frac{4}{3}$, pues en una igualdad de potencias si los exponentes son iguales, entonces las bases son iguales.

- Por último, de $\log_{\frac{1}{3}} r$ = –2, por la definición se llega a $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ = r, es decir, r = 9, debido a que $\left(\frac{1}{p}\right)^{-n}$ = p^n.

Luego, pqr = $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 9 = 6$, valor que se encuentra en la opción E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

Contenido: Logaritmos.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 12

Si x es un número real mayor que 1, entonces $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2$ es igual a

A) 0
B) 2
C) $2x - \sqrt{x^2-1}$
D) $2x - 2\sqrt{x^2-1}$
E) 2x

COMENTARIO

En esta pregunta se debe desarrollar el cuadrado de un binomio, para luego aplicar las propiedades de las raíces.

De esta manera:

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1} + \left(\sqrt{x-1}\right)^2$$

Recuerde que:
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$= x + 1 - 2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1} + x - 1$$

Recuerde que:
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, con $a > 0$

$$= 2x - 2\sqrt{(x+1)(x-1)}$$

Recuerde que:
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$$= 2x - 2\sqrt{x^2-1}$$

Recuerde que:
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Luego, la opción correcta es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

Contenido: Operaciones con raíces enésimas.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 13

Si a, b, n y p son números reales positivos, entonces $\sqrt[b]{a^n}\cdot\sqrt[n]{p^b}$ es igual a

A) ap

B) $(ap)^{\frac{n^2+b^2}{nb}}$

C) $\sqrt[bn]{a^{n^2}p^{b^2}}$

D) $\sqrt[bn]{(ap)^{n+b}}$

E) ninguna de las expresiones anteriores.

COMENTARIO

Para responder este ítem se pueden igualar los índices de las raíces, transformando las raíces en potencias, para luego realizar la multiplicación de raíces de igual índice, como se muestra a continuación:

$$\sqrt[b]{a^n}\cdot\sqrt[n]{p^b} = a^{\frac{n}{b}}\cdot p^{\frac{b}{n}} \longrightarrow$$

Transformando las raíces a potencias.

$$\left.\begin{aligned} &= a^{\frac{n\cdot n}{b\cdot n}}\cdot p^{\frac{b\cdot b}{n\cdot b}} \\ &= a^{\frac{n^2}{bn}}\cdot p^{\frac{b^2}{bn}} \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

Igualando los denominadores de las fracciones de los exponentes.

$$= \sqrt[bn]{a^{n^2}}\cdot\sqrt[bn]{p^{b^2}} \longrightarrow$$

Transformando las potencias a raíces.

$$= \sqrt[bn]{a^{n^2}p^{b^2}} \longrightarrow$$

Recuerde que: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

Por lo tanto, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Establecer relaciones entre potencias, logaritmos y raíces en el contexto de los números reales, demostrar algunas de sus propiedades y aplicarlas a la resolución de problemas.

Contenido: Operaciones con raíces enésimas.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 14

En la recta numérica están ubicados los números negativos R, S y T. Si entre ellos, S es el que está más cerca del cero, R el que está más lejos del cero y T está entre R y S, ¿cuál de las siguientes desigualdades **NO** se cumple?

A) $S - R > 0$

B) $-R - T < 0$

C) $S - T > 0$

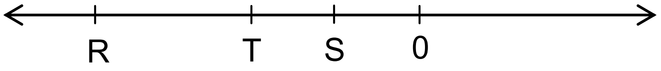
D) $S - R > S - T$

E) $R - T < 0$

COMENTARIO

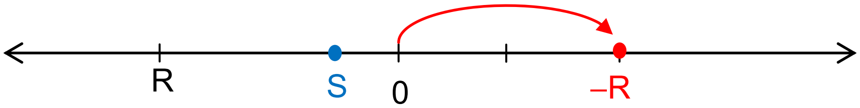
Una forma de resolver el ítem es ubicar los números R, S y T en la recta numérica de acuerdo a las condiciones dadas en el enunciado para luego analizar las desigualdades dadas en las opciones.

Del enunciado se tiene que R, S y T se ubican de la siguiente forma en la recta numérica:

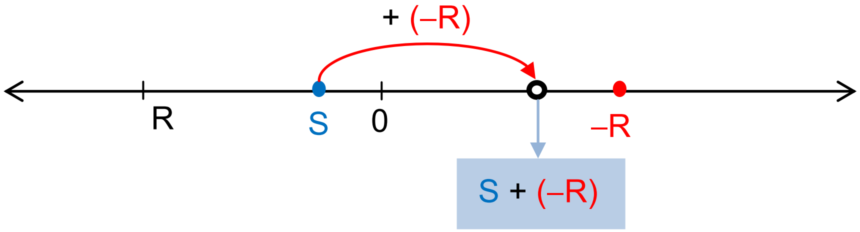


De este modo, se tiene que:

- ✓ En A), S – R se puede escribir como S + (–R), luego en la recta numérica se ubican los números S y (–R).

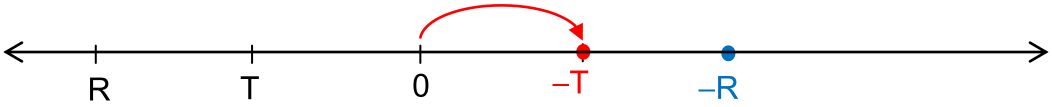


Entonces, al sumar S + (–R) en la recta numérica se obtiene lo siguiente:

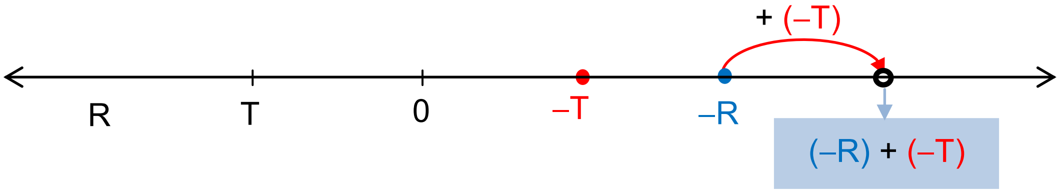


Así, se puede observar que S + (–R) es mayor que cero, luego, la desigualdad en A), **sí se cumple**.

- ✓ En B), –R – T se puede escribir como (–R) + (–T), luego en la recta numérica se ubican los puntos (–R) y (–T).

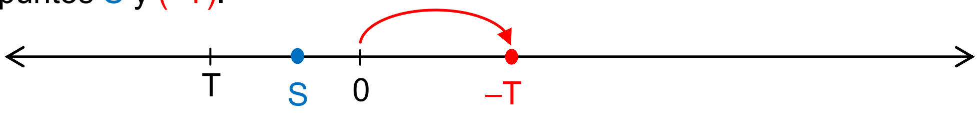


Luego, al sumar (–R) + (–T) en la recta numérica se tiene lo siguiente:

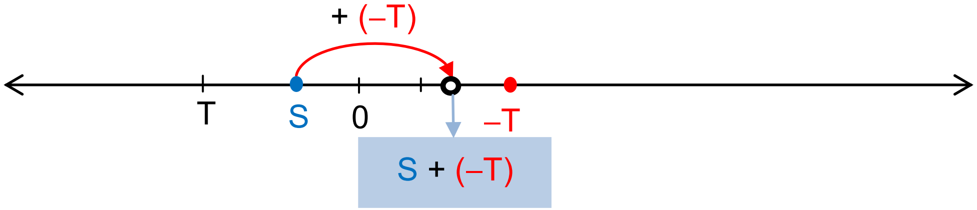


De esta manera, se puede observar que (–R) + (–T) es mayor que cero, luego, la desigualdad en B) **no se cumple**.

- ✓ En C) S – T se puede escribir como S + (–T), luego en la recta numérica se ubican los puntos S y (–T).

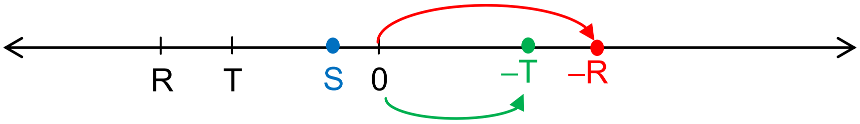


Al sumar S + (–T) en la recta numérica se llega a lo siguiente:

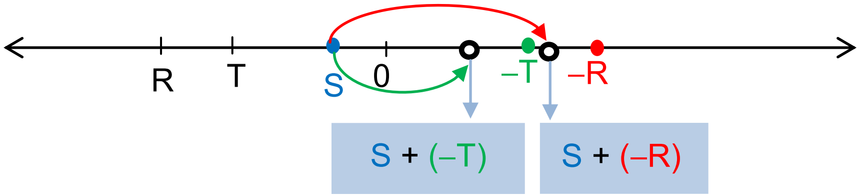


Donde se puede observar que S + (–T) es mayor que cero, luego, la desigualdad en C), **sí se cumple**.

- ✓ En D), al igual que en A) y en C), S – R = S + (–R) y S – T = S + (–T), luego en la recta numérica se tiene lo siguiente:

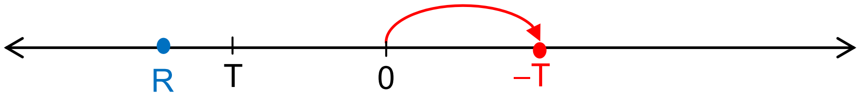


Y al sumar en la recta numérica se obtiene lo siguiente:

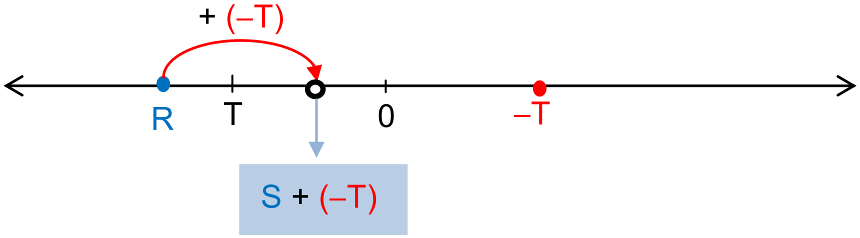


Por lo tanto, la desigualdad S – R > S – T dada en D), **sí se cumple.**

- ✓ Finalmente, en E) se tiene que R – T = R + (–T) lo cual representado en la recta numérica es:



Al sumar en la recta numérica, se tiene lo siguiente:



De donde se observa que, R + (–T) es menor que cero, por lo tanto, la desigualdad en E), **sí se cumple.**

Por el desarrollo anterior, se llega a que la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Utilizar los números reales en la resolución de problemas, ubicarlos en la recta numérica, demostrar algunas de sus propiedades y realizar aproximaciones.

Contenido: Orden de números reales.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: B

PREGUNTA 15

Si a y c son números reales, ¿cuál(es) de las siguientes ecuaciones, en x, tiene(n) solución en el conjunto de los números reales?

I) $-(ax^2 + c) = 0$, con $ac > 0$
II) $-(x^2 - c) = 0$, con $c > 0$
III) $-x^2 + \frac{a}{c} = 0$, con $ac > 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Solo II y III

COMENTARIO

Para determinar si las ecuaciones dadas en las afirmaciones tienen solución en el conjunto de los números reales, primero se puede despejar la incógnita y luego analizar la expresión que representa la solución en base a la condición dada en cada una de las afirmaciones, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Afirmación	Al despejar la incógnita en la ecuación:	Al analizar la solución:
I)	$-(ax^2 + c) = 0$ $-ax^2 - c = 0$ $-ax^2 = c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	Como ac > 0, se tiene que $\frac{c}{a} > 0$, luego x es un número complejo no real.
II)	$-(x^2 - c) = 0$ $-x^2 + c = 0$ $-x^2 = -c$ $x^2 = c$ $x = \pm\sqrt{c}$	Como c > 0, se tiene que x es un número real.
III)	$-x^2 + \frac{a}{c} = 0$ $-x^2 = -\frac{a}{c}$ $x^2 = \frac{a}{c}$ $x = \pm\sqrt{\frac{a}{c}}$	Como ac > 0, se tiene que $\frac{a}{c} > 0$, luego x es un número real.

Por el análisis anterior, como solo las ecuaciones planteadas en II) y III) tienen solución en el conjunto de los números reales, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que los números complejos constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números reales, y reconocer su relación con los números naturales, números enteros, números racionales y números reales.

Contenido: Identificación de situaciones que muestran la necesidad de ampliar los números reales a los números complejos.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 16

Si z_1, z_2 y z_3 son números complejos, con $z_1 = 2i$, $z_2 = 3 – i$ y $z_3 = 2 + 4i$, entonces $(z_1 + z_2 \cdot z_3)$ es igual a

A) 10 + 14i
B) 10 + 12i
C) 2 + 12i
D) 10 + 2i
E) 2 + 14i

COMENTARIO

Para resolver este ítem se requiere operar con números complejos considerando la prioridad de las operaciones. Así, en primer lugar de debe realizar la multiplicación entre z_2 y z_3, para luego sumar este producto con z_1.

En efecto,

$$z_1 + z_2 \cdot z_3 = 2i + (3 – i)\cdot(2 + 4i)$$

Reemplazando por los números complejos respectivos.

$$= 2i + (6 + 12i – 2i – 4i^2)$$

Multiplicando el binomio.

$$= 2i + 6 + 12i – 2i + 4$$

Recuerde que $i^2 = –1$

Desarrollando la potencia de i se tiene que $– 4i^2 = – 4 \cdot –1 = 4$

$$= 10 + 12i$$

Reduciendo los términos semejantes.

Por el resultado obtenido, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Operaciones con números complejos.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 17

Se puede determinar el número complejo z, si se conoce:

(1) z^{-1}
(2) z^2

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

COMENTARIO

Para determinar el complejo z se debe analizar si con los datos dados en (1) y/o en (2) se pueden encontrar sus componentes.

Así, en (1) se dice que se conoce el complejo z^{-1}, es decir, se conoce el inverso multiplicativo de z, luego al determinar el inverso multiplicativo de z^{-1} se puede determinar z, ya que **$(z^{-1})^{-1} = z$**.

Con la información dada en (2) se conoce z^2. Así, sea el número complejo k, de la forma a + bi, con a y b números reales, tal que $z^2 = k$, luego se tiene que $z^2 - k = 0$. Ahora, al factorizar $z^2 - k$, como suma por su diferencia, se obtiene $(z - n)(z + n) = 0$, donde $n^2 = k$.

Recuerde que:

El conjunto de los números complejos es un conjunto cerrado respecto de las operaciones de adición multiplicación, esto quiere decir, entre otras cosas, que la multiplicación de dos números complejos da como resultado un número complejo.

Luego, z = n ó z = –n, por lo que no se puede determinar cuál es el número complejo z pedido en el enunciado.

Como solo con el dato entregado en (1) se puede determinar el complejo z, la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Números

Área Temática: Números

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Aplicar procedimientos de cálculo de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números complejos, formular conjeturas acerca de esos cálculos y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido: Operaciones con números complejos.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: A

PREGUNTA 18

La fórmula para calcular la rapidez de un objeto con aceleración constante es $V_f = V_i + gt$, donde V_f corresponde a la rapidez final, g es la aceleración, V_i es la rapidez inicial y t es el tiempo transcurrido. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa **siempre** la aceleración?

A) $\frac{V_f}{t} - V_i$

B) $V_f - V_i - t$

C) $\frac{V_f + V_i}{t}$

D) $\frac{V_i - V_f}{t}$

E) $\frac{V_f - V_i}{t}$

COMENTARIO

Para encontrar la expresión que representa la aceleración (g), se puede realizar el siguiente procedimiento:

$$V_f = V_i + gt$$

$$V_f - V_i = gt$$

Sumando por el opuesto de V_i a ambos lados de la igualdad, es decir, por $-V_i$.

$$\frac{V_f - V_i}{t} = g$$

Multiplicando por el reciproco de t a ambos lados de la igualdad, es decir, por $\frac{1}{t}$.

Luego, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables, diferenciar entre verificación y demostración de propiedades y analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos, para fundamentar opiniones y tomar decisiones.

Contenido: Ecuaciones literales de primer grado.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 19

¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** es equivalente a la expresión $3x^2 – 15x + 18$?

A) $18 – 3x(5 – x)$
B) $3(x^2 – 5x + 6)$
C) $3(x – 3)(x – 2)$
D) $3(3 – x)(x – 2)$
E) $3x(x – 5) + 18$

COMENTARIO

Para responder esta pregunta se debe factorizar la expresión $3x^2 – 15x + 18$, de distintas maneras para determinar cuál de las que aparece en las opciones no es válida. Una forma de realizarlo es la que se muestra a continuación:

- Si se extrae como factor común el término **–3x** en los dos primeros términos de la expresión se tiene que:

$$3x^2 – 15x + 18 = –3x(–x + 5) + 18 = 18 – 3x(5 – x)$$

Esta expresión se encuentra en la opción A).

- Ahora, si se realiza la misma factorización anterior, pero extrayendo como factor común **3x**, se obtiene:

  $$3x^2 - 15x + 18 = 3x(x - 5) + 18$$

  Esta expresión se encuentra en la opción E).

- Por otro lado, si se factoriza, extrayendo como factor común el **3** en los tres términos de la expresión, se llega a:

  $$3x^2 - 15x + 18 = 3(x^2 - 5x + 6)$$

  En este caso, esta expresión se encuentra en la opción B).

- Además, si la expresión obtenida dentro del paréntesis de la factorización anterior, se factoriza como un producto de binomios, se obtiene:

  $$3x^2 - 15x + 18 = 3(x^2 - 5x + 6) = 3(x - 3)(x - 2) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} -3 \cdot -2 = 6 \\ -3 + -2 = -5 \end{array}}$$

  Expresión que se encuentra en la opción C).

- Por último, como $3x^2 - 15x + 18 = 3(x - 3)(x - 2)$ y como $x - 3 \neq 3 - x$, se tiene que la expresión que está en D) **NO** es equivalente a la expresión dada en el enunciado.

Por el desarrollo anterior, la opción correcta es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelo de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual o usando herramientas tecnológicas.

Contenido: Factorización de expresiones algebraicas.

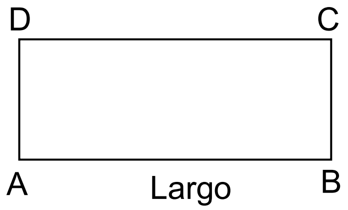
Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 20

La expresión $(x^2 - x - 6)$ representa el área, en unidades cuadradas, del rectángulo ABCD de la figura adjunta, cuyo largo es $(x + 2)$ unidades. Si el largo se aumenta en 2 unidades y su ancho se mantiene, entonces una expresión que representa la variación del área del nuevo rectángulo con respecto del rectángulo original, en unidades cuadradas, es

A) -18
B) $x + 4$
C) $2x - 6$
D) $x - 11$
E) $-x - 18$



COMENTARIO

La solución a la pregunta se puede encontrar factorizando la expresión que representa el área del rectángulo y así, determinar una expresión que represente la medida del ancho de este. Además, de determinar las expresiones que representan la medida de los lados del nuevo rectángulo, según las condiciones dadas en el enunciado, para luego encontrar el área de este nuevo rectángulo y así, determinar la expresión que representa la variación de las áreas de ambos rectángulos, restándolas entre ellas.

De esta forma, $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$ →

$2 \cdot -3 = -6$

$2 + -3 = -1$

Como $(x + 2)$ unidades representa el largo del rectángulo, se tiene que $(x - 3)$ unidades representa su ancho.

En la siguiente tabla se representan los rectángulos con sus respectivas medidas:

Rectángulo ABCD	Nuevo rectángulo
 Ancho: $(x - 3)$ unidades Largo: $(x + 2)$ unidades	 Ancho: $(x - 3)$ unidades El ancho se mantiene Largo: $x + 4$ El largo aumenta en 2 unidades
Área = $x^2 - x - 6$	Área = $(x + 4)(x - 3) = x^2 + x - 12$

De esta manera, la variación solicitada en el enunciado, es decir, la diferencia entre el área del rectángulo ABCD y el área del nuevo rectángulo es:

$$x^2 + x - 12 - (x^2 - x - 6) = x^2 + x - 12 - (x^2 + x + 6) = 2x - 6$$

Expresión que se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelo de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual o usando herramientas tecnológicas.

Contenido: Establecimiento de estrategias para transformar expresiones algebraicas no fraccionarias en otras equivalentes.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 21

Si x es distinto de a, de –a y de 0, entonces $\frac{x^2 - a^2}{x^2 \; - ax} : \frac{x - a}{x + a}$ es igual a

A) $\frac{x(x-a)}{(x+a)^2}$

B) $-\frac{a}{x}$

C) $\frac{x-a}{x}$

D) $\frac{x+a}{x}$

E) $\frac{(x+a)^2}{x(x-a)}$

COMENTARIO

Para resolver este ítem se puede simplificar las fracciones algebraicas y así, determinar cuál de las expresiones presentadas en las opciones es igual a $\frac{x^2-a^2}{x^2-ax} : \frac{x-a}{x+a}$, como se muestra en el siguiente desarrollo:

$$\frac{x^2-a^2}{x^2-ax} : \boxed{\frac{x-a}{x+a}}$$

Recuerde que:

$$\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}$$

$$\boxed{\frac{x^2-a^2}{x^2-ax}} \cdot \boxed{\frac{x+a}{x-a}}$$

Es conveniente factorizar las expresiones del numerador y del denominador para poder simplificar.

$$\boxed{\frac{(x-a)(x+a)}{x(x-a)}} \cdot \frac{x+a}{x-a}$$

Ahora, al simplificar las expresiones del numerador con el denominador.

$$\boxed{\frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{x\cancel{(x-a)}}} \cdot \frac{x+a}{x-a}$$

$$\frac{x+a}{x} \cdot \frac{x+a}{x-a}$$

Finalmente, al multiplicar las fracciones algebraicas.

$$\frac{(x+a)^2}{x(x-a)}$$

Por lo tanto, $\frac{x^2-a^2}{x^2-ax} : \frac{x-a}{x+a} = \frac{(x+a)^2}{x(x-a)}$, luego la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Interpretar la operatoria con expresiones algebraicas fraccionarias como una generalización de la operatoria con fracciones numéricas, establecer estrategias para operar con este tipo de expresiones y comprender que estas operaciones tienen sentido solo en aquellos casos en que estas están definidas.

Contenido: Operatoria con expresiones algebraicas fraccionarias.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 22

En un cajón solo hay fichas blancas y rojas. De estas, m son blancas y 4n son rojas. Si se saca la mitad de las fichas blancas, entonces el cajón queda con un total de 110 fichas. En cambio, si se agrega un 75% del total de fichas blancas y se quitan 10 fichas rojas, entonces el cajón queda con un total de 175 fichas. ¿Cuál es el total de fichas que había inicialmente en el cajón?

A) 80
B) 101
C) 73
D) 140
E) Ninguno de los valores anteriores.

COMENTARIO

Este ítem se puede resolver a través de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En este caso, se debe determinar la cantidad de fichas que contiene un cajón, considerando la siguiente información del enunciado:

- "…De estas, m son blancas y 4n son rojas…", por lo que el cajón tiene un total de fichas que se puede expresar como:

$$\underbrace{m}_{\text{Cantidad de fichas } \textbf{blancas}.} + \underbrace{4n}_{\text{Cantidad de fichas } \textbf{rojas}.}$$

  Por lo tanto, el problema se reduce a determinar el valor de m y de 4n.

- "…Si se saca la mitad de las fichas blancas, entonces el cajón queda con un total de 110 fichas…", esto se puede expresar como:

$$\underbrace{\frac{m}{2}}_{\text{Cantidad de fichas } \textbf{blancas} \text{ que quedan en el cajón.}} + \underbrace{4n}_{\text{Cantidad de fichas } \textbf{rojas}.} = 110$$

  Por lo anterior, al reducir la ecuación anterior se obtiene la ecuación 0,5m + 4n = 110, la cual corresponde a la **primera ecuación del sistema**.

- "…si se agrega un 75% del total de fichas blancas y se quitan 10 fichas rojas, entonces el cajón queda con un total de 175 fichas…", lo cual se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$\underbrace{\frac{75}{100}m + m}_{\text{Es la suma entre el 75\% de m más m, que corresponde al total de fichas blancas que contiene el cajón.}} + \underbrace{4n - 10}_{\text{A las 4n fichas rojas se le extraen 10 fichas.}} = 175$$

Es la suma entre el 75% de m más m, que corresponde al total de fichas **blancas** que contiene el cajón.

A las 4n fichas **rojas** se le extraen 10 fichas.

Así es como, al reducir y ordenar la expresión anterior, se obtiene 1,75m + 4n = 185, la cual corresponde a la **segunda ecuación del sistema** que es:

$$\begin{array}{r|} 0{,}5m + 4n = 110 \\ 1{,}75m + 4n = 185 \\ \hline \end{array}$$

Finalmente, este sistema de ecuaciones se puede resolver, por ejemplo, por el método de reducción, como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{r|} 0{,}5m + 4n = 110 \\ 1{,}75m + 4n = 185 \\ \hline \end{array}$$

Al multiplicar por –1 a ambos lados de la primera igualdad.

$$\begin{array}{r|} -0{,}5m - 4n = -110 \\ 1{,}75m + 4n = 185 \\ \hline \end{array}$$

Al sumar cada una de las componentes de las ecuaciones, en ambos lados de la igualdad.

$$-0{,}5m + 1{,}75m - 4n + 4n = -110 + 185$$

Al reducir los términos semejantes.

$$1{,}25m = 75$$

Al multiplicar por el recíproco de 1,25 en ambos lados de la igualdad, es decir, por 0,8.

$$m = 60$$

Luego, al reemplazar m = 60 en alguna de las dos ecuaciones del sistema, se obtiene que 4n = 80, por lo tanto, m + 4n = 140, lo cual corresponde a la cantidad de bolitas que contiene el cajón, siendo de esta forma la opción D) la correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Contenido: Resolución de problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en contextos variados.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 23

Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} mx + ny = 9 \\ 3mx - ny = 7 \end{array}\right|$, en x e y, con m y n distintos de 0 y distintos entre sí, ¿cuál de las siguientes expresiones representa a $(mn(x + y))$?

A) $5m + 4n$
B) $m + 8n$
C) $4m + 5n$
D) $10m - n$
E) $13m + 4n$

COMENTARIO

Para contestar la pregunta se debe trabajar con un sistema de ecuaciones lineales para encontrar la expresión que representa a $(mn(x + y))$.

Así, la expresión $(mn(x + y))$ se puede escribir como $mnx + mny = n(mx) + m(ny)$, por lo que el problema se reduce a determinar el valor de mx y ny desde el sistema de ecuaciones.

El sistema de ecuaciones del enunciado se puede resolver por cualquier método, en este caso, se efectuará por el método de reducción, realizando el siguiente desarrollo:

Se suman cada una de las componentes de las ecuaciones, en ambos lados de la igualdad.

$$\begin{array}{l|} mx + ny = 9 \\ 3mx - ny = 7 \\ \hline \end{array}$$

$$mx + \cancel{n}y + 3mx - \cancel{n}y = 9 + 7$$

$$mx + 3mx = 16$$

$$4mx = 16$$

$$mx = 4$$

Se multiplica por el recíproco de 4 en ambos lados de la igualdad, es decir, por $\frac{1}{4}$.

Luego, al reemplazar $mx = 4$ en alguna de las ecuaciones del sistema, se obtiene $ny = 5$ y al desarrollar, se tiene:

Al multiplicar por n.

$$mx = 4 \qquad ny = 5$$

$$n(mx) = 4n \qquad m(ny) = 5m$$

Al multiplicar por m.

Finalmente, se obtiene que $mn(x + y) = n(mx) + m(ny) = 4n + 5m$, siendo de esta forma, la opción A) la respuesta correcta a la pregunta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Contenido: Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 24

Un maestro tiene una cuerda de largo L cm y con la totalidad de ella construye los bordes de un rectángulo no cuadrado de área A cm^2. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la longitud del lado menor de dicho rectángulo, en cm?

A) $\dfrac{L - \sqrt{L^2 - 4A}}{2}$

B) $\dfrac{L + \sqrt{L^2 - 4A}}{2}$

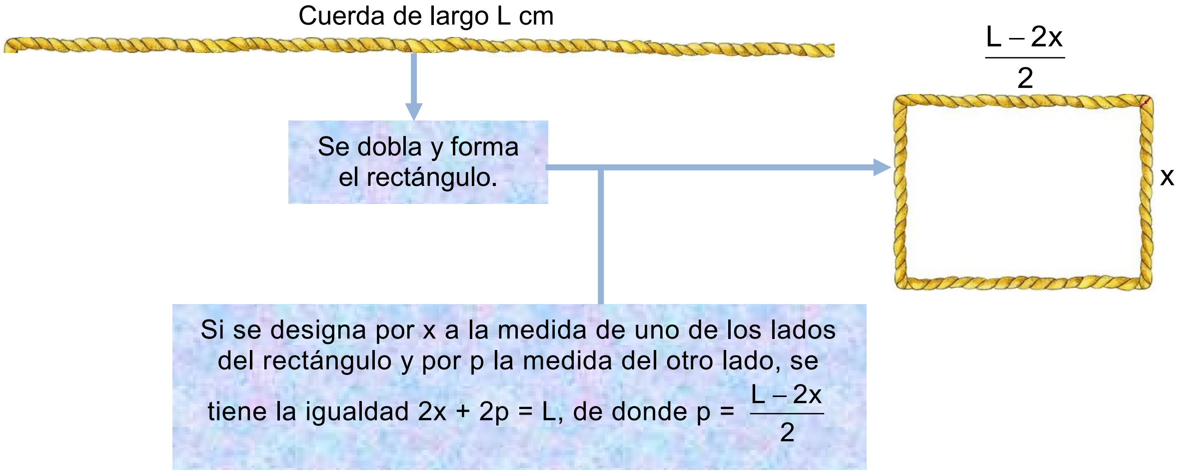
C) $\dfrac{L - \sqrt{L^2 - 16A}}{4}$

D) $\dfrac{L + \sqrt{L^2 - 16A}}{4}$

E) $\dfrac{L - \sqrt{L^2 - 16A}}{2}$

COMENTARIO

Para resolver este ítem, se puede representar la situación mediante el siguiente dibujo:



Se dobla y forma el rectángulo.

Si se designa por x a la medida de uno de los lados del rectángulo y por p la medida del otro lado, se tiene la igualdad 2x + 2p = L, de donde p = $\dfrac{L-2x}{2}$

De esta manera, el área del rectángulo se puede expresar como $x\left(\dfrac{L-2x}{2}\right) = A$, con lo que se tiene una ecuación de segundo grado. Ahora, al reordenar sus términos se pueden seguir los siguientes pasos:

$$x\left(\frac{L-2x}{2}\right) = A \quad \Rightarrow \quad \frac{Lx-2x^2}{2} = A$$

Al multiplicar por el recíproco de $\frac{1}{2}$ a ambos lados de la igualdad, es decir, por 2.

$$Lx - 2x^2 = 2A$$

$$Lx - 2x^2 - 2A = 0$$

Al ordenar los términos de la ecuación cuadrática.

$$-2x^2 + Lx - 2A = 0$$

Al multiplicar por –1, en ambos lados de la igualdad para facilitar los cálculos al obtener x.

$$2x^2 - Lx + 2A = 0$$

Luego, para determinar la longitud del lado menor del rectángulo se puede aplicar la fórmula general para la resolución de una ecuación cuadrática.

Recuerde que las **soluciones de una ecuación cuadrática** de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales, están dadas por $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

De la ecuación $2x^2 - Lx + 2A = 0$, se tiene que a = 2, b = –L y c = 2A y al reemplazar estos términos en la fórmula general se obtiene lo siguiente:

$$x = \frac{-(-L) \pm \sqrt{(-L)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2A}}{2 \cdot 2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 16A}}{4}$$

Así, las longitudes de los lados del rectángulo son $\dfrac{L + \sqrt{L^2 - 16A}}{4}$ cm y $\dfrac{L - \sqrt{L^2 - 16A}}{4}$ cm, pero como se necesita obtener el lado de menor medida, la solución es $\dfrac{L - \sqrt{L^2 - 16A}}{4}$, siendo de esta manera la opción correcta del ítem la C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

Contenido: Resolución de problemas asociados a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: C

PREGUNTA 25

Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tal que a, b y c son números reales, con $a \neq 0$ y $a(2 - 3i)^2 + b(2 - 3i) + c = 0$, donde $(2 - 3i)$ es un número complejo. El producto de las soluciones de la ecuación es

- A) 13
- B) $-5 - 12i$
- C) $13 - 12i$
- D) -5
- E) indeterminable con los datos dados.

COMENTARIO

Para resolver este ítem se debe comprender que cuando una de las soluciones de una ecuación cuadrática con coeficientes reales es un número complejo de la forma $x_1 = p + qi$, con p y q números reales y $q \neq 0$, la otra raíz es su conjugado, es decir, $x_2 = p - qi$.

Como se cumple que a, b y c son números reales, $a \neq 0$ y $a(2 - 3i)^2 + b(2 - 3i) + c = 0$, se tiene que una de las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es $x_1 = 2 - 3i$, por lo tanto, la otra solución es $x_2 = 2 + 3i$.

Luego, se multiplica $x_1 \cdot x_2$ tal como se muestra a continuación:

Recuerde que:
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(2 - 3i)\cdot(2 + 3i)$

$2^2 - (3i)^2$

Como $i^2 = -1$, se tiene:
$-(3i)^2 = -3^2 \cdot i^2 = -9 \cdot (-1) = 9$

$4 + 9$

De esta forma, se obtiene que el producto entre las soluciones de la ecuación es 4 + 9 = 13, por lo que la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces en el conjunto de los números complejos.

Contenido: Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: A

PREGUNTA 26

Si p es un número real distinto de cero, entonces **siempre** se cumple que

I) $2p < 3p$
II) $2 – p < 3 – p$
III) $1 < 2p^2$

Es (son) verdadera(s)

A) solo I.
B) solo II.
C) solo I y II.
D) solo II y III.
E) I, II y III.

COMENTARIO

Para determinar la veracidad de las desigualdades dadas en I), en II) y en III), se debe considerar que el número real p, distinto de cero, puede ser **mayor que cero (p > 0)** o **menor que cero (p < 0)**.

Así, **no** se puede determinar que la desigualdad en I) sea siempre verdadera, pues si p es menor que cero se tiene que 2p > 3p, por ejemplo si p = –1 se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{l} 2p = 2 \cdot -1 = -2 \\ \\ 3p = 3 \cdot -1 = -3 \end{array}\right\} \longrightarrow -2 > -3$$

En II), se puede desarrollar la desigualdad como:

$$\begin{array}{c} 2 - p < 3 - p \\ 2 - p + p < 3 - p + p \\ 2 < 3 \end{array}$$

Se suma el opuesto de –p a ambos lados de la desigualdad, es decir, p.

Luego, la desigualdad en II) es **siempre verdadera**, es decir, se verifica para cualquier valor de p.

En III), si se considera, por ejemplo, que $p = 0,05$ se tiene que:

$$1 < 2p^2$$
$$1 < 2 \cdot (0,05)^2$$
$$1 < 2 \cdot 0,0025$$
$$1 < 0,005$$

Por lo tanto, como esta relación no es verdad, se tiene que la desigualdad en III) **no** es siempre verdadera, pues depende del valor de p.

De esta forma, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.

Contenido: Inecuaciones lineales con una incógnita.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: B

PREGUNTA 27

El sistema de inecuaciones $\left.\begin{array}{r} ax + 1 \leq 0 \\ x + a \geq 0 \end{array}\right|$ tiene un conjunto solución **NO** vacío,

si se sabe que:

(1) $a^2 < 1$

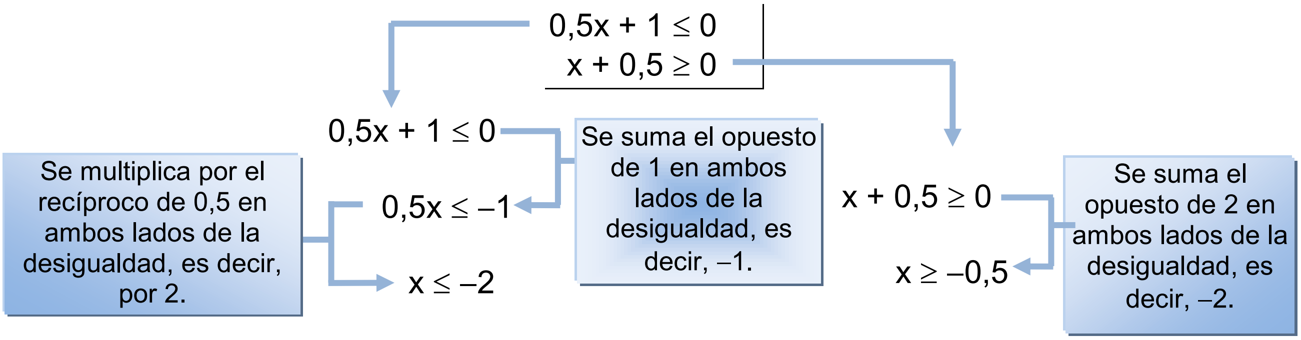
(2) $a < 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

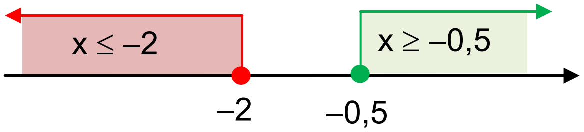
COMENTARIO

En este ítem se debe determinar con cuál de las afirmaciones presentadas en (1) y/o en (2) se puede saber si el sistema de inecuaciones dado en el enunciado tiene solución **NO** vacía.

En (1) se tiene que $a^2 < 1$, por lo que si se considera, por ejemplo, a = 0,5 el sistema queda

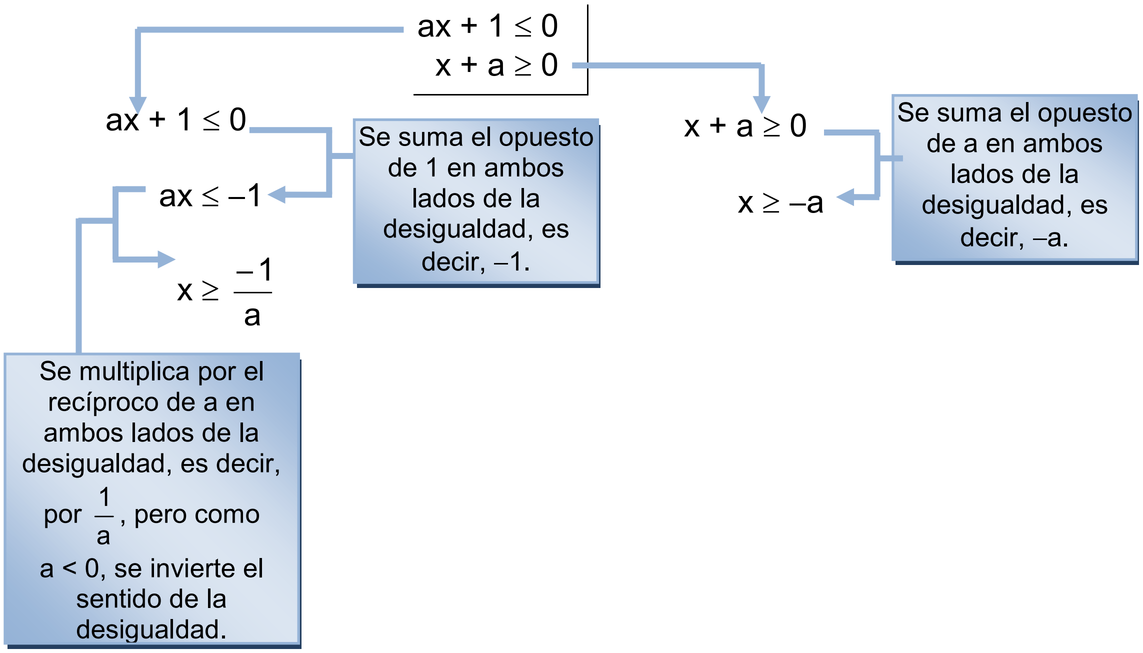


Al graficar las soluciones del sistema de inecuaciones, se tiene lo siguiente:



Por lo tanto, si a = 0,5, el sistema tiene solución vacía, luego la información en (1) por sí sola no permite determinar que el sistema de inecuaciones tiene solución NO vacía, depende del valor de a.

En (2) se entrega la información de que a < 0. Al despejar x en cada una de las inecuaciones del sistema se obtiene lo siguiente:



$$\begin{array}{r} ax + 1 \leq 0 \\ x + a \geq 0 \end{array}$$

$ax + 1 \leq 0$

Se suma el opuesto de 1 en ambos lados de la desigualdad, es decir, –1.

$ax \leq -1$

Se multiplica por el recíproco de a en ambos lados de la desigualdad, es decir, por $\frac{1}{a}$, pero como a < 0, se invierte el sentido de la desigualdad.

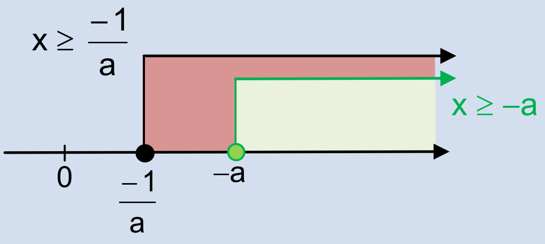
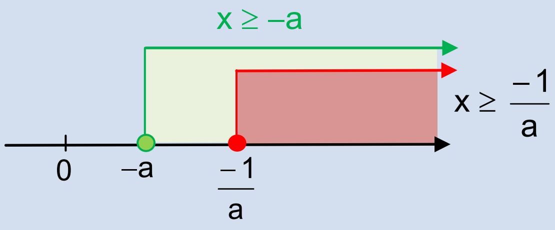
$x \geq \frac{-1}{a}$

$x + a \geq 0$

Se suma el opuesto de a en ambos lados de la desigualdad, es decir, –a.

$x \geq -a$

Al graficar las soluciones del sistema de inecuaciones para distintos valores de a, se analizará cuando –a ≥ 1 y cuando 0 < –a < 1, obteniéndose los siguientes casos:

$-a \geq 1$	$0 < -a < 1$
	

En cualquiera de los dos casos anteriores, al saber que a < 0, se puede determinar que el sistema de inecuaciones **tiene solución NO vacía**, por lo tanto, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Álgebra

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.

Contenido: Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: B

PREGUNTA 28

¿Cuál(es) de las siguientes relaciones se puede(n) escribir como una función de la forma f(x) = kx, con k una constante y con dominio el conjunto de los números reales positivos?

I) La longitud de una circunferencia en función de su radio.
II) La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles en función de su cateto.
III) La medida de un lado de un triángulo equilátero en función de su área.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

COMENTARIO

Para resolver el ítem, se debe determinar cuál de las relaciones que se muestran en cada afirmación, se puede escribir como una función de la forma f(x) = kx, con k una constante.

De esta manera, de la relación dada en I):

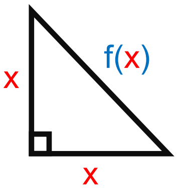
$$\text{“La } \underbrace{\text{longitud de una circunferencia}}_{f(x)} \text{ en función de su } \underbrace{\text{radio}}_{x}\text{”}$$

Se tiene que, como la longitud de una circunferencia corresponde a su perímetro, la función f se puede escribir como $f(x) = 2\pi x$, donde $k = 2\pi$.

La relación dada en II):

$$\text{“La } \underbrace{\text{hipotenusa}}_{f(x)} \text{ de un triángulo rectángulo isósceles en función de su } \underbrace{\text{cateto}}_{x}\text{”}$$

Se representa en el siguiente dibujo:



Aplicando el teorema de Pitágoras.

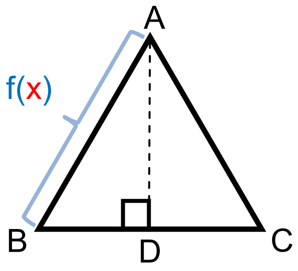
$$f(x) = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,x$$

Luego, la relación dada en II) se puede expresar como $f(x) = \sqrt{2}\,x$, donde $k = \sqrt{2}$.

Ahora, en la relación dada en III):

$$\text{“La } \underbrace{\text{medida de un lado}}_{f(x)} \text{ de un triángulo equilátero en función de su } \underbrace{\text{área}}_{x}\text{”}$$

Se designa por ABC al triángulo equilátero y se obtiene la siguiente figura:



Recuerde que el **área de un triángulo equilátero** de lado *p* es $p \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Por lo anterior, el área del triángulo se puede expresar como $x = f(x)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ y para despejar $f(x)$ se desarrolla de la siguiente manera:

$$x = f(x)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Se multiplica por el recíproco de $\frac{\sqrt{3}}{4}$ en ambos lados de la igualdad, es decir, por $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot x = f(x)^2$$

Se extrae la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad.

$$\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{x} = f(x)$$

Por lo que, la relación en III) se expresa como una función de la forma $g(x) = k\sqrt{x}$, donde $k = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}}$.

Debido a que solo las relaciones dadas en I) y en II) se pueden escribir de la forma $f(x) = kx$, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Función lineal.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 29

Para el cobro de electricidad de un sector rural se ha establecido un modelo lineal de cálculo. En este cobro se debe pagar $ a por un cargo fijo más un monto por kWh consumido. Si por un consumo de x kWh el cobro es de $ M, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde al monto total, en pesos, a cobrar por un consumo de z kWh?

A) $a + \left(\frac{M}{x}\right)z$

B) $a + \left(\frac{M - a}{z}\right)x$

C) $a + \frac{M - az}{x}$

D) $a + \left(\frac{M - a}{x}\right)z$

E) $a + Mz$

COMENTARIO

El modelo lineal de cálculo del cobro de electricidad, corresponde a una relación donde el monto total de consumo (Ct) es igual a un cobro fijo (Cf) más un cobro variable (Cv) por kWh, por lo que, para responder la pregunta, se debe obtener una expresión que represente Ct para un consumo de z kWh, es decir:

$$Ct = Cf + \underbrace{z \cdot (\text{monto por kWh})}_{Cv}$$

Del enunciado, se tiene que:

- "…se cobra $ a por un cargo fijo…", por lo tanto Cf = a.
- "…por un consumo de x kWh el cobro es de $ M…", por lo tanto Ct = M.

De esta forma, se puede escribir la relación Ct = Cf + z · (monto por kWh) como:

$$M = a + x \cdot (\text{monto por kWh})$$

Al despejar el monto por kWh se obtiene:

Se suma el opuesto de a en ambos lados de la desigualdad, es decir, –a.

$$M = a + x \cdot (\text{monto por kWh})$$

$$M - a = a - a + x \cdot (\text{monto por kWh})$$

$$M - a = x \cdot (\text{monto por kWh})$$

$$\frac{M - a}{x} = (\text{monto por kWh})$$

Se multiplica por el recíproco de x en ambos lados de la igualdad, es decir, por $\frac{1}{x}$.

Finalmente, reemplazando el monto por kWh en el monto total de consumo, se obtiene la expresión $a + \left(\frac{M - a}{x}\right)z$, la cual se encuentra en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias utilizando diversas estrategias y utilizar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Función afín.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 30

Sea la función f, cuyo dominio es el conjunto $\{1, 2, 3\}$, definida por f(x) = x – 1, sea la función g, con dominio el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, definida por g(x) = x + 1 y sea la función h con dominio el conjunto de los números enteros definida por h(x) = 3. ¿Para cuál de las siguientes funciones el 3 **NO** es parte del dominio?

A) $h \circ (f \circ g)$
B) $g \circ (h \circ f)$
C) $f \circ (h \circ g)$
D) $g \circ (f \circ h)$
E) $h \circ (g \circ f)$

COMENTARIO

Para resolver este ítem se debe analizar en cuál de las opciones el 3 no pertenece al dominio de las composiciones.

Recuerde que:

Dadas las funciones *f* y *g*, para que se pueda realizar la **composición** $f \circ g$ se debe cumplir que el recorrido de *g* debe estar contenido en el dominio de *f*.

- En A) para verificar que 3 **no** es parte del dominio de $h \circ (f \circ g)$, en primer lugar se analiza la composición $f \circ g$, donde el recorrido de g debe estar contenido en el dominio de f. Ahora, el recorrido de g es $\{1, 2, 3, 4\}$, obtenido de reemplazar los elementos del dominio en la función y además, como el dominio de f es $\{1, 2, 3\}$, se tiene que el 4 del recorrido de g no se debe considerar para que se pueda realizar la composición de las funciones, esto quiere decir, que el 3 debe ser quitado del dominio de g, pues el 4 es la imagen del 3.

- En la composición dada en B), el 3 es parte del dominio de la función, pues el recorrido de f, que es $\{0, 1, 2\}$, está contenido en el dominio de h que es el conjunto de los números enteros. Además, el recorrido de $h \circ f$, que es el conjunto $\{3\}$ está contenido en el dominio de g, que es $\{1, 2, 3, 4\}$.

- De la misma manera, en la composición dada en C) el 3 es parte del dominio de la función, puesto que el recorrido de g está contenido en el dominio de h. Además, el recorrido de $h \circ g$, que es el conjunto $\{3\}$, está contenido en el dominio de f, que es $\{1, 2, 3\}$.

- También, en la composición dada en D) el 3 es parte del dominio de la función, porque h es una función constante de recorrido $\{3\}$ que está contenido en el dominio de f y, además, el recorrido de $f \circ h$, que es el conjunto $\{2\}$, está contenido en el dominio de g, que es $\{1, 2, 3, 4\}$.

- Ahora, en la composición dada en E), el 3 es parte del dominio de la función, pues el recorrido de f está contenido en el dominio de g y el recorrido de $g \circ f$, que es el conjunto $\{1, 2, 3\}$, está contenido en el dominio de h, que es el conjunto de los números enteros.

De lo anterior, en la composición dada en A) el 3 queda fuera del dominio de la función, por lo que esta es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender los conceptos y propiedades de la composición de funciones.

Contenido: Composición de funciones.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: A

PREGUNTA 31

Con respecto a la función f(x) = $\sqrt{x}$, con dominio el conjunto de los números reales **NO** negativos, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

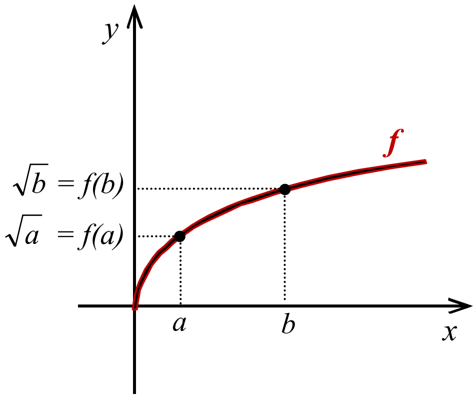
I) Si 0 < a < b, entonces f(a) < f(b).
II) Todos los elementos del recorrido son números positivos.
III) La imagen de 4 es 2.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Solo I y III

COMENTARIO

Para resolver este ítem se debe analizar la veracidad de las afirmaciones presentadas en I), en II) y en III).

Recuerde que: El gráfico de la **función raíz cuadrada** $f(x) = \sqrt{x}$, con dominio el conjunto de los números reales, es el que se muestra a continuación:



De la gráfica se observa que para a < b, se tiene que f(a) < f(b), por lo que la afirmación en I) es **verdadera**.

La afirmación en II) es **falsa**, porque de acuerdo al enunciado el dominio de f son todos los números reales no negativos, es decir, el conjunto $[0, \infty[$, luego el recorrido de f incluye al cero, ya que $\sqrt{0}$ = 0.

La afirmación en III) es **verdadera**, pues f(4) = $\sqrt{4}$ = 2.

Como solo las afirmaciones en I) y en III) son verdaderas, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Utilizar las funciones exponencial, logarítmica y raíz cuadrada como modelos de situaciones o fenómenos en contextos significativos y representarlas gráficamente en forma manual.

Contenido: Función raíz cuadrada.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 32

Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definidas por $f(x) = kx^2 + (k + 1)x + k + 2$, con k un número real distinto de cero. ¿Cuál de las siguientes relaciones debe cumplir el número k para que la gráfica de f intersecte al eje x en un solo punto?

A) $\dfrac{-(k+1)+\sqrt{(k+1)^2-4k(k+2)}}{2k} = 0$

B) $3k^2 + 6k - 1 = 0$

C) $3k^2 + 6k - 1 > 0$

D) $k = -1$

E) Ninguna de las anteriores.

COMENTARIO

La función presente en el enunciado de la pregunta corresponde a una función cuadrática y para responderla recuerde que:

> Para que la **gráfica de una función cuadrática** de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ intersecte el eje x en un solo punto, se debe cumplir que $b^2 - 4ac = 0$.

De la función $f(x) = kx^2 + (k + 1)x + k + 2$, se tiene que $a = k$, $b = k + 1$ y $c = k + 2$, por lo tanto, para que la gráfica de la función f, intersecte al eje x en un solo punto, se debe cumplir que $(k + 1)^2 - 4k(k + 2) = 0$ y al desarrollar esta igualdad se tiene:

Recuerde que:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(k + 1)^2 - 4k(k + 2) = 0$$

$$k^2 + 2k + 1 - 4k^2 - 8k = 0$$

Se reducen términos semejantes.

$$-3k^2 - 6k + 1 = 0$$

Se multiplica por el recíproco de 1 en ambos lados de la igualdad, es decir, por –1.

$$3k^2 + 6k - 1 = 0$$

Por lo que, la respuesta a la pregunta se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.

Contenido: Función cuadrática.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 33

La altura f(t) alcanzada, medida en metros, de un proyectil se modela mediante la función $f(t) = 20t - t^2$, donde t se mide en segundos desde que se lanza hasta que toca el suelo. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones se puede(n) deducir de esta información?

I) El proyectil cae a 20 metros de distancia de donde fue lanzado.
II) A los 10 segundos desde que el proyectil es lanzado, este alcanza su altura máxima.
III) La gráfica de f tiene un eje de simetría.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

COMENTARIO

En este ítem se debe determinar si las afirmaciones presentadas en I), en II) y en III) se pueden deducir, en relación a la función $f(t) = 20t - t^2$ que modela la altura de un proyectil.

En I) se afirma que el proyectil cae a 20 metros de distancia de donde fue lanzado, esta afirmación **no se puede deducir**, debido a que la función f modela la altura del proyectil y no la distancia donde cae este proyectil. Puede ocurrir, por ejemplo, que el proyectil caiga en el mismo lugar donde fue lanzado.

La afirmación en II) **si se puede deducir**, porque la altura máxima que alcanza el proyectil corresponde a la ordenada del punto que es el vértice de la parábola asociada a la función f.

Recuerde que:

Las coordenadas del **vértice de la parábola** asociadas a una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales, es

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Ahora, al remplazar los valores a = –1 y b = 20 extraídos de la función, se tiene que:

$$\text{Para} \quad \frac{-b}{2a} \xrightarrow[\text{Reemplazando a y b en la fracción.}]{} \frac{-20}{2\cdot(-1)} \xrightarrow[\text{Multiplicando los números enteros.}]{} \frac{-\cancel{20}}{-\cancel{2}} \xrightarrow[\text{Simplificando la fracción.}]{} 10$$

Así, $\frac{-b}{2a}$ = 10 y como f(t) = 20t – t^2, se tiene que:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(10) \xrightarrow[\text{Valorando 10 en f.}]{} 20\cdot(10) - (10)^2 \xrightarrow[\text{Multiplicando los números enteros.}]{} 200 - 100 \xrightarrow[\text{Restando los números enteros.}]{} 100$$

Por lo que, el vértice de la parábola asociada a f es (10, 100), lo que significa que a los 10 segundos se alcanzan 100 metros, que es la altura máxima.

Finalmente, como la gráfica de f es una parábola, se tiene que esta tiene un eje de simetría, luego la afirmación en III) también **se puede deducir**.

Por el análisis anterior, D) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyos modelos resultantes sean funciones cuadráticas.

Contenido: Modelamiento de situaciones o fenómenos asociados a funciones cuadráticas.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 34

Sean las funciones $f(x) = ax^2$, $g(x) = ax^3$ y $h(x) = ax^4$, con $a > 0$, tal que el dominio de cada una de ellas es el conjunto de los números reales. ¿Para cuántos valores de x se tiene que $f(x) = g(x) = h(x)$?

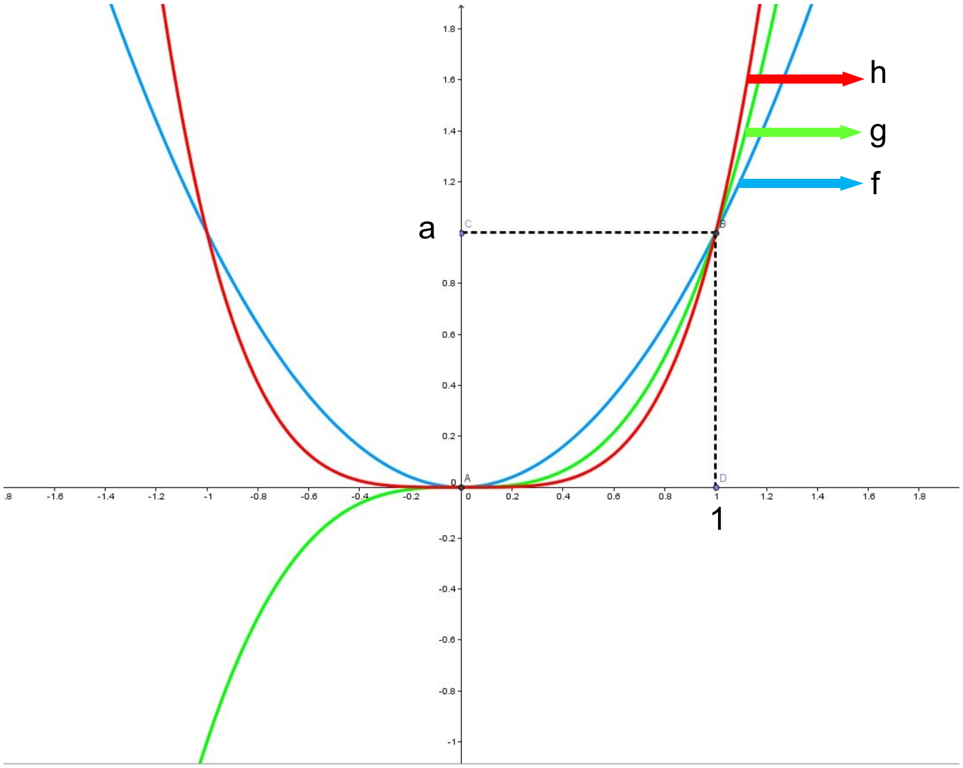
A) Para ningún valor.
B) Para solo un valor.
C) Para solo dos valores.
D) Para solo tres valores.
E) No se puede determinar, depende del valor de a.

COMENTARIO

Para responder a la pregunta se pueden graficar las funciones f, g y h en un mismo plano cartesiano, para así determinar los puntos de intersección de estas funciones.

A continuación, se presenta una tabla que muestra la imagen de algunos valores del dominio de las funciones f, g y h, así como la representación gráfica de estas funciones en un mismo plano cartesiano.

x	f(x)	g(x)	h(x)
–2	4a	–8a	16a
–1	a	–a	a
0	0	0	0
1	a	a	a
2	4a	8a	16a



De la tabla y el gráfico, se obtiene que las tres funciones se intersectan en los puntos (0, 0) y (1, a), por lo que C) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia, inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.

Contenido: Función potencia.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 35

Sea f: $\left]-\infty, 3\right] \to$ B, definida por $f(x) = (x - 3)^2$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) f no es inyectiva.

II) Si B es $\left[0, \infty\right[$, entonces f es epiyectiva.

III) Si f es biyectiva, entonces su inversa es $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 3$, con x en B.

A) Solo I

B) Solo II

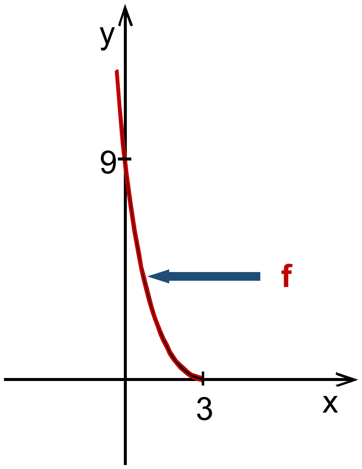
C) Solo III

D) Solo II y III

E) I, II y III

COMENTARIO

Para resolver este ítem se debe determinar la veracidad de las afirmaciones presentadas en I), en II) y en III), para lo cual se puede representar la gráfica de la función $f(x) = (x - 3)^2$, cuyo dominio es $\left]-\infty, 3\right]$, como se muestra a continuación:



Recuerde que:

Una **función** *f* es **inyectiva** cuando a elementos diferentes del domino le corresponden elementos diferentes del codominio (conjunto de llegada). O dicho de otra manera cuando a cada elemento del dominio de *f* le corresponde un único elemento en el recorrido de *f*.

Ahora, como en la figura precedente se observa que a elementos diferentes del dominio le corresponden elementos diferentes del recorrido, se tiene que la afirmación en I) es **falsa**.

Recuerde que:

Una **función** *f* es **epiyectiva** cuando cualquier elemento del codominio es imagen de al menos un elemento del dominio de la función. O dicho de otra manera cuando el recorrido de *f* y el codominio (conjunto de llegada) de *f* coinciden.

Del gráfico de la función f se puede observar que el recorrido de esta función es $[0, \infty[$ y en II) se dice que B es $[0, \infty[$, luego el conjunto de llegada y el recorrido de f son iguales, por lo que la afirmación en II) es **verdadera**.

Recuerde que:

Para que una **función** *f* tenga **inversa**, *f* debe ser biyectiva, es decir, debe ser inyectiva y epiyectiva a la vez.

En III) se indica que la función f es biyectiva, por lo tanto, se puede determinar su inversa y para ello se puede realizar lo siguiente:

Como $f(x) = (x - 3)^2$ y como $y = f(x)$, se tiene que:

$$y = (x - 3)^2$$

Al sumar el opuesto de $(x - 3)^2$ a ambos lados de la igualdad, es decir, $-(x - 3)^2$.

$$y - (x - 3)^2 = 0$$

Recuerde que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$\left(\sqrt{y} - (x - 3)\right)\left(\sqrt{y} + (x - 3)\right) = 0$$

De donde se obtiene

$$\left(\sqrt{y} - (x - 3)\right) = 0 \qquad \text{ó} \qquad \left(\sqrt{y} + (x - 3)\right) = 0$$

Por lo que, al despejar x se llega a que

$$x = \sqrt{y} + 3 \quad \text{ó} \quad x = -\sqrt{y} + 3$$

Luego, la inversa f^{-1} de f puede ser $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 3$ ó $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 3$

Una forma de determinar cuál es la función inversa de f es valorar en ella un elemento perteneciente al dominio de f, por ejemplo, para x = 2, luego la imagen que se obtenga es evaluada en f^{-1} para determinar en cuál de ellas se obtiene el 2.

En la siguiente tabla se muestra el ejemplo descrito anteriormente:

Elemento del dominio de f	Función f	Posible función inversa de f	Posible función inversa de f
x	$f(x) = (x - 3)^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 3$	$f^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 3$
2	$(2 - 3)^2 = 1$	$f^{-1}(1) = \sqrt{1} + 3 = 4$	$f^{-1}(1) = -\sqrt{1} + 3 = 2$

Así, de la tabla anterior se tiene que $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 3$ es la función inversa de f, siendo la afirmación en III) **verdadera**.

De este modo, como las afirmaciones en II) y en III) son verdaderas se llega a que D) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa.

Contenido: Función inyectiva, epiyectiva, biyectiva e inversa.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: D

PREGUNTA 36

Sea f una función tal que f: IR → IR. Se puede determinar que f es biyectiva, si se sabe que:

(1) Todas las rectas paralelas al eje x intersectan a la gráfica de f, en exactamente un punto.

(2) Todas las rectas paralelas al eje y intersectan a la gráfica de f, en exactamente un punto.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

COMENTARIO

Para determinar si la función f es biyectiva, se debe analizar la información presentada en (1) y en (2).

Recuerde que:

- ✓ Una **función** es **biyectiva** si es inyectiva y epiyectiva a la vez.
- ✓ Una **función** es **inyectiva** cuando a elementos diferentes del domino le corresponden elementos diferentes del codominio (conjunto de llegada). O dicho de otra manera cuando a cada elemento del dominio de f le corresponde un único elemento en el recorrido de f.
- ✓ Una **función** es **epiyectiva** cuando cualquier elemento del codominio es imagen de al menos un elemento del dominio de la función. O dicho de otra manera cuando el recorrido de f y el codominio (conjunto de llegada) de f coinciden.

Del enunciado se tiene que el dominio de la función f es IR y la información en (1) dice que **Todas** las rectas paralelas al eje x intersectan a la gráfica de f en **exactamente un punto**, lo que es lo mismo que decir que a cada elemento del dominio de f le corresponde un único elemento del recorrido, luego se tiene que la función f es inyectiva.

Ahora, respecto al recorrido de f, al decir en (1) que **Todas** las rectas paralelas al eje x intersectan a la gráfica de f, significa que el recorrido IR coincide con el conjunto de llegada de f, luego la función f es epiyectiva.

Por lo tanto, la información dada en (1) es suficiente para determinar que la función f es biyectiva.

Ahora, la información en (2) no es suficiente para determinar que f es biyectiva, por ejemplo, una función cuadrática cumple la condición dada en (2), pero no es inyectiva, pues dos elementos del dominio tienen la misma imagen en el recorrido.

De lo anterior, la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Álgebra

Área Temática: Funciones

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa.

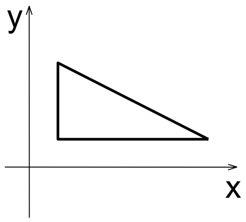
Contenido: Función biyectiva.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

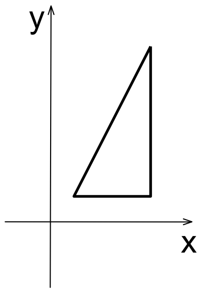
Clave: A

PREGUNTA 37

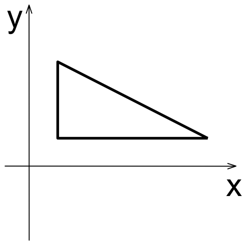
El triángulo rectángulo de la figura adjunta, se rota sucesivamente con centro en el origen del sistema de ejes coordenados, en 60° y en sentido antihorario. ¿En cuál de las opciones se muestra mejor la posición en que queda el triángulo después de 90 rotaciones?



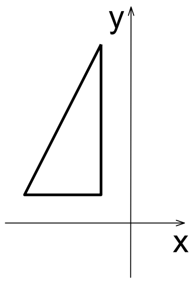
A)



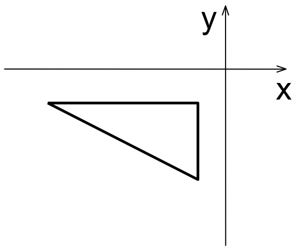
B)



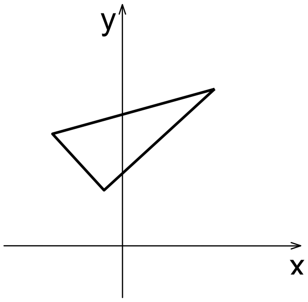
C)



D)



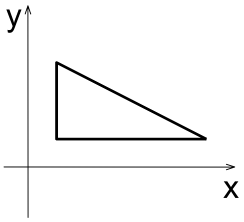
E)

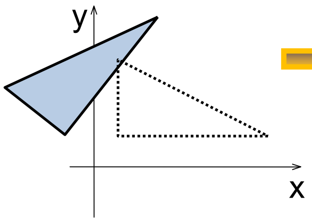


COMENTARIO

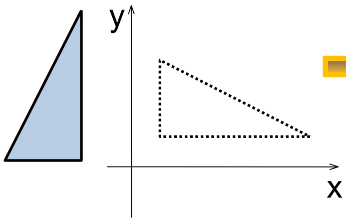
Para resolver este ítem se debe tener presente que si un punto ubicado en el plano cartesiano se gira en un ángulo de 360° en torno al origen del sistema de ejes coordenados, el punto vuelve a la misma posición en que estaba inicialmente. Esto se puede aplicar a puntos, a rectas y a figuras geométricas ubicadas en el plano cartesiano.

Así, si la figura adjunta se rota con un ángulo de 60° en torno al origen del sistema de ejes coordenados seis veces en sentido antihorario, se tiene que esta volverá a la misma posición en donde se encontraba, ya que $6 \cdot 60° = 360°$, como se muestra en la siguiente figura:

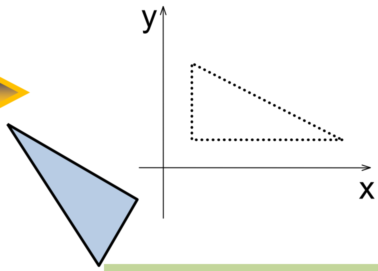




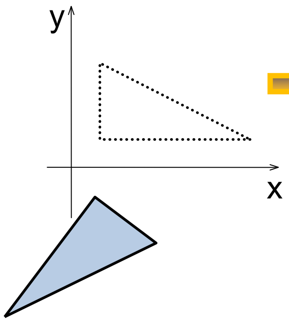
1era rotación en 60°



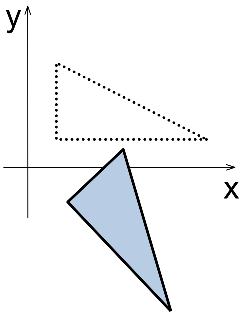
2da rotación en 60°



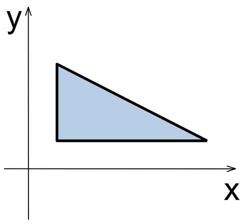
3era rotación en 60°



4ta rotación en 60°



5ta rotación en 60°



6ta rotación en 60°

Ahora, como 90 es un múltiplo de 6 y cada 6 rotaciones la figura se encuentra en la misma posición en la que estaba, se tiene que luego de las 90 rotaciones la figura estará en la misma posición.

Por lo tanto, B) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas y utilizar la composición de funciones para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas.

Contenido: Rotaciones de figuras geométricas en el plano cartesiano.

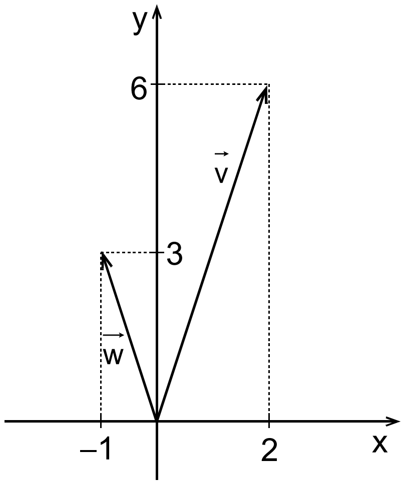
Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: B

PREGUNTA 38

Si en el plano cartesiano de la figura adjunta se representan $\vec{v}$ y $\vec{w}$, entonces $\left(2\vec{v} - \vec{w}\right)$ es

A) (5, 9)
B) (3, 9)
C) (–4, 0)
D) (9, 5)
E) ninguno de los vectores anteriores.



COMENTARIO

Para contestar la pregunta se deben ponderar y restar los vectores representados en el plano cartesiano de la figura adjunta.

De la figura se tiene que el vector $\vec{v}$ es (2, 6) y el vector $\vec{w}$ es (–1, 3), luego:

$\left(2\vec{v} - \vec{w}\right) = 2(2, 6) - (-1, 3)$ → Reemplazando por los vectores respectivos.

$= (4, 12) - (-1, 3)$ → Realizando la ponderación de 2 por (2, 6).

$$\left.\begin{aligned} &= (4 -(-1), 12 - 3) \\ &= (5, 9) \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

Restando los vectores.

Así, la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

Contenido: Vectores en el plano cartesiano.

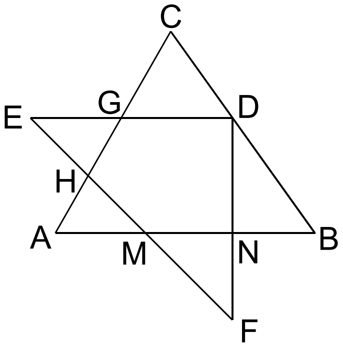
Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 39

Los puntos M, N, G y H están en los lados de los triángulos ABC y EDF a la vez, como se muestra en la figura adjunta. Si D pertenece a $\overline{BC}$, AM = MN = NB y $\overline{EF}$ // $\overline{BC}$, entonces es **siempre** verdadero que

A) Δ AMH ≅ Δ MNF
B) Δ BND ≅ Δ MNF
C) Δ GDC ≅ Δ MNF
D) Δ EGH ≅ Δ GCD
E) Δ AMH ≅ Δ GDC



COMENTARIO

Para dar solución a la pregunta, en cada par de triángulos dados en las opciones se analizarán sus elementos para verificar si son o no congruentes.

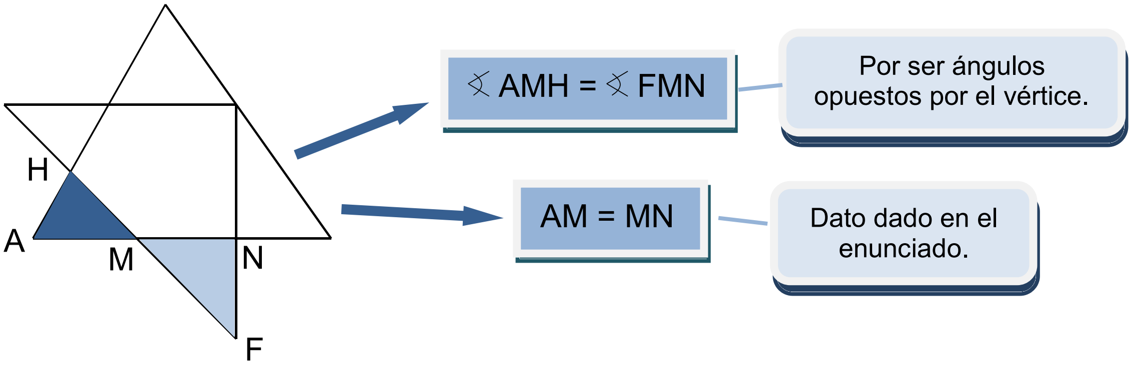
Recuerde que:

Dos **polígonos** son **congruentes** cuando los ángulos de vértices correspondientes son congruentes, así como los lados correspondientes también lo son.

Recuerde el criterio ángulo-lado-ángulo (ALA) de congruencia de triángulos:

Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado adyacente a ambos respectivamente congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

- En la siguiente figura están destacados el Δ AMH y el Δ MNF dados en A). A partir de ellos se analizan sus elementos para determinar si son congruentes.



∢ AMH = ∢ FMN

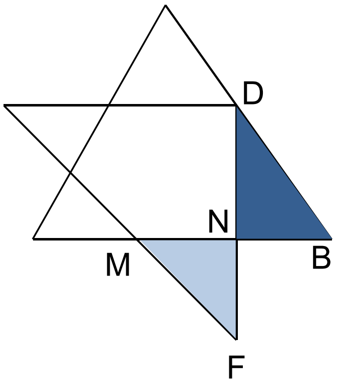
Por ser ángulos opuestos por el vértice.

AM = MN

Dato dado en el enunciado.

Como no se entrega más información de los otros elementos de los triángulos no se puede aplicar un criterio de congruencia de triángulos y podría ser que las medidas de los otros pares de ángulos correspondientes no tengan por que ser iguales, por lo que **no siempre** se cumple que ∆ AMH ≅ ∆ MNF.

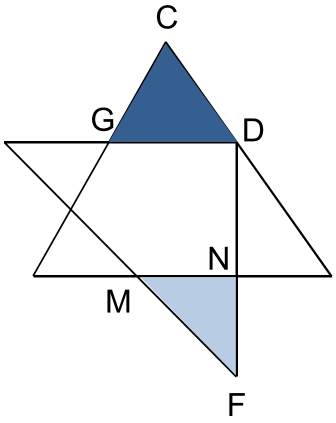
- Ahora, en la siguiente figura están destacados el ∆ MNF y el ∆ BND presentados en B), de los cuales se tiene que:



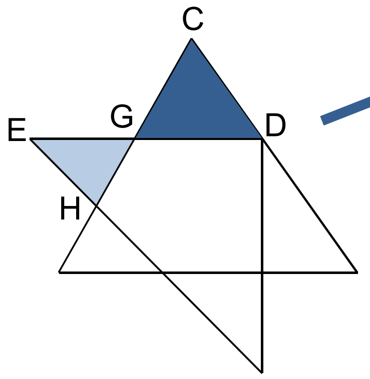
∢ NDB = ∢ NFM	Por ser ángulos alternos internos entre paralelas.
∢ BND = ∢ FNM	Por ser ángulos opuestos por el vértice.
∢ DBN = ∢ NMF	La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
NB = MN	Dato dado en el enunciado.

Por lo anterior, al aplicar el criterio de congruencia ALA se tiene que **siempre** ∆ BND ≅ ∆ MNF.

- En C) se afirma que ∆ GDC ≅ ∆ MNF, triángulos que están destacados en la siguiente figura. Esta relación **no es siempre verdadera**, pues no se tiene información de las medidas de los lados y de los ángulos entre ellos, para concluir que son iguales.



- Los triángulos mencionados en D) son el Δ EGH y el Δ GCD, los cuales se dice que son congruentes. En la siguiente figura se destacan:



∢ DCG = ∢ EHG

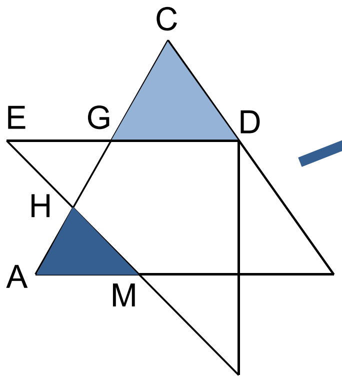
Por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

∢ CGD = ∢ EGH

Por ser ángulos opuestos por el vértice.

Como no se entrega información de los lados de los triángulos no se puede aplicar un criterio de congruencia de triángulos, solo se puede afirmar que los triángulos son semejantes, por lo que **no siempre** se cumple que Δ EGH ≅ Δ GCD.

- De la misma manera, los triángulos mencionados en E) **no son siempre congruentes**, pues los datos dados son insuficientes para determinarlo, solo se puede determinar que tienen un par de ángulos iguales pero los otros podrían ser distintos. En la siguiente figura se destacan los triángulos y se indica lo que se conoce:



∢ AHM = ∢ GCD

Pues:
∢ GCD = ∢ EHG (ángulos alternos internos)
y
∢ EHG = ∢ AHM
(ángulos opuestos por el vértice)

Por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

En relación al desarrollo anterior, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Conocer y utilizar conceptos y propiedades asociados al estudio de la congruencia de figuras planas, para resolver problemas y demostrar propiedades.

Contenido: Congruencia de figuras planas.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 40

Si las coordenadas de los vértices de un triángulo son (4, 0), (12, 0) y (12, 8), ¿cuál es el área del triángulo, en unidades cuadradas?

A) 32

B) 48

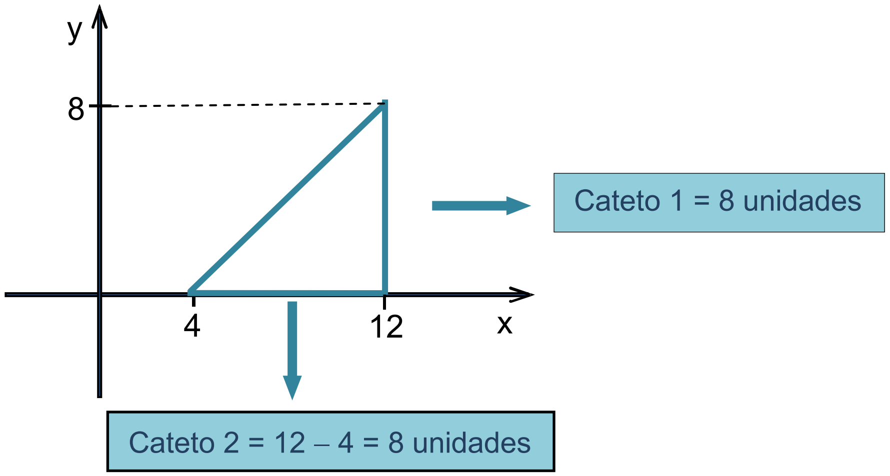
C) 96

D) 64

E) $16\sqrt{2}$

COMENTARIO

Una manera de resolver el ítem es ubicar los puntos en el plano cartesiano, para luego determinar el área del triángulo que se obtiene, como se muestra en la figura adjunta.



Cateto 1 = 8 unidades

Cateto 2 = 12 – 4 = 8 unidades

Al ubicar los puntos en el plano cartesiano se puede observar que estos son los vértices de un triángulo rectángulo, donde la medida de ambos catetos es igual a 8 unidades.

Ahora,

Recuerde que el **área de un triángulo rectángulo** es la mitad del producto entre las medidas de los catetos.

El área del triángulo de la figura es $\frac{8 \cdot 8}{2}$ = 32 unidades cuadradas.

Luego, la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

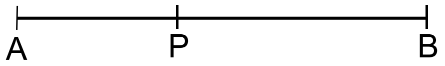
Contenido: Representación de puntos y figuras en el plano cartesiano.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 41

¿Con cuál de las siguientes condiciones el trazo AB de la figura adjunta **NO** es dividido interiormente por el punto P en la razón de 2 : 3, con AP < PB?



A) AP = 12 cm y PB = 18 cm

B) $\frac{PB}{AB} = \frac{3}{5}$

C) PB = 1,5AP

D) AP = 4b cm y PB = 6b cm

E) AP = 10 cm y AB = 15 cm

COMENTARIO

Del enunciado se tiene que si el punto P divide al trazo AB en la razón 2 : 3 se debe cumplir que $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$.

En A), como AP = 12 cm y PB = 18 cm, $\xrightarrow{\text{se tiene que}}$ $\frac{AP}{PB} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, luego P divide al trazo AB en la razón 2 : 3.

En B), se tiene que $\frac{PB}{AB} = \frac{3}{5}$ lo que implica que PB = $\frac{3AB}{5}$, $\xrightarrow{\text{luego}}$ AP = $\frac{2AB}{5}$, porque AP + PB = AB, así $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$, por lo que P divide al trazo AB en la razón 2 : 3.

En C), como PB = 1,5AP se tiene que $\frac{PB}{AP} = \frac{3}{2}$, $\xrightarrow{\text{por lo que}}$ P divide al trazo AB en la razón 2 : 3.

En D), como AP = 4b cm y PB = 6b cm, $\xrightarrow{\text{se obtiene que}}$ $\frac{AP}{PB} = \frac{4b}{6b} = \frac{2}{3}$, por lo que P divide al trazo AB en la razón 2 : 3.

En E), como AP = 10 cm y AB = 15 cm, $\xrightarrow{\text{se llega a que}}$ $\frac{AP}{AB} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, por lo que P

NO divide al trazo AB en la razón 2 : 3. Lo divide en la razón 2 : 1.

De lo anterior, E) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

Contenido: División interior de un trazo en una razón dada.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 42

¿Cuál(es) de los siguientes conjuntos de condiciones, por separado, permite(n) determinar que un triángulo PQR es semejante a otro triángulo TUV?

I) $\measuredangle$ RPQ = 80°, $\measuredangle$ QRP = 60°, $\measuredangle$ UVT = 60° y el ángulo exterior al $\measuredangle$ TUV mide 140°

II) PR = 8 cm, VT = 12 cm, RQ = 10 cm y VU = 15 cm

III) $\overline{PQ} \parallel \overline{TU}$, $\overline{RP} \parallel \overline{VT}$ y $\overline{RQ} \parallel \overline{VU}$

A) Solo I

B) Solo III

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y III

COMENTARIO

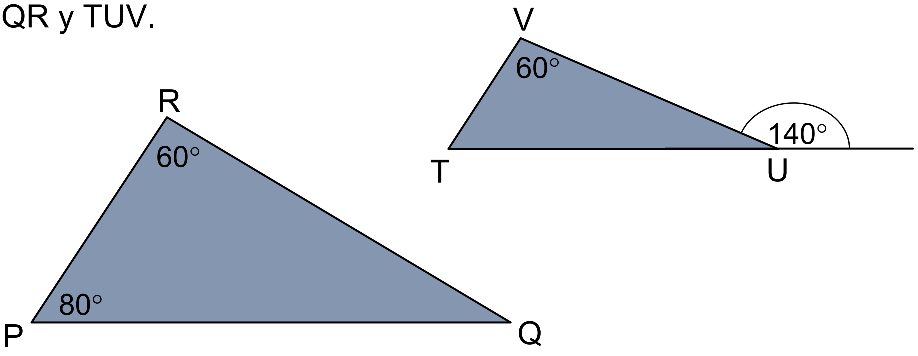
En este ítem se debe determinar si con las condiciones dadas en I), en II) y en III), por separado se puede determinar que Δ PQR $\sim$ ΔTUV.

Recuerde que:

Dos **triángulos** son **semejantes** si sus ángulos correspondientes son iguales y los lados homólogos son proporcionales.

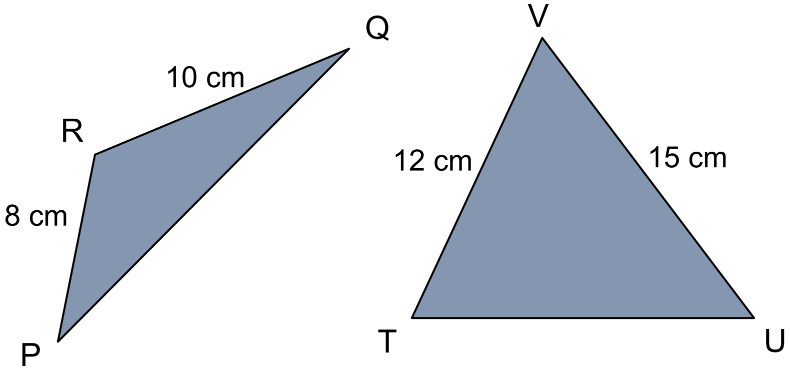
Uno de los **criterios de semejanza** que permite determinar si dos triángulos lo son, es el ángulo-ángulo (**AA**) que señala que si dos triángulos tienen dos pares de ángulos de igual medida, entonces los triángulos son semejantes.

En la siguiente figura se representan las condiciones dadas en I) para unos posibles triángulos PQR y TUV.

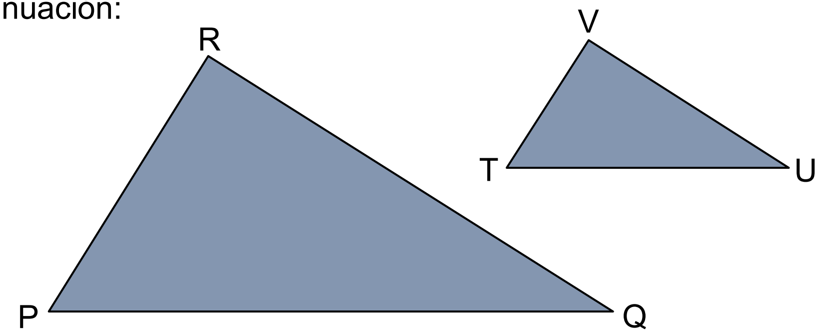


Como los ángulos interiores de un triángulo deben sumar 180°, se tiene que ∢ PQR = 40° y en el triángulo TVU como el ángulo exterior al ∢ TUV mide 140°, se tiene que ∢ TUV = 40°. Ahora, por el criterio de semejanza AA los triángulos PQR y TUV son semejantes.

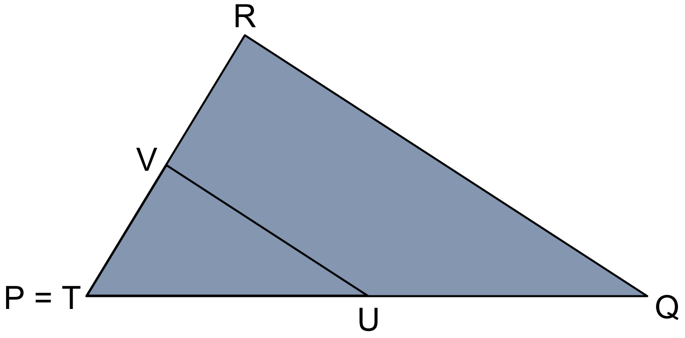
Las condiciones presentadas en II) no permiten determinar que los triángulos PQR y TUV sean semejantes, por ejemplo, para los triángulos de la siguiente figura, se cumplen las condiciones dadas en II), pero nada se indica de los ángulos, ni del tercer lado.



En III), se tiene que $\overline{PQ}$ // $\overline{TU}$, $\overline{RP}$ // $\overline{VT}$ y $\overline{RQ}$ // $\overline{VU}$, como en los triángulos que se muestran a continuación:



Ahora, una forma de ver que son semejantes es superponer el triángulo TUV en el triángulo PQR, haciendo coincidir el vértice P con el vértice T como se muestra en la siguiente figura



Luego, con las condiciones dadas en III) los triángulos PQR y TUV tienen en común el $\sphericalangle$ VTU y además, el $\sphericalangle$ PRQ = $\sphericalangle$ TVU por ser ángulos correspondientes en $\overline{RQ}$ // $\overline{VU}$, de manera que por el criterio AA se tiene que los triángulos son semejantes.

Como con las condiciones dadas en I) y en III) se puede determinar que Δ PQR $\sim$ Δ TUV, D) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

Contenido: Criterios de semejanza de triángulos.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

PREGUNTA 43

Si dos polígonos son semejantes, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) La razón entre sus áreas es igual que la razón entre las medidas de sus lados homólogos.

B) La razón entre las medidas de sus ángulos es igual que la razón entre las medidas de sus lados homólogos.

C) Los polígonos son congruentes.

D) Los polígonos son regulares.

E) La razón entre sus perímetros es igual que la razón entre las medidas de sus lados homólogos.

COMENTARIO

Para dar solución a la pregunta se debe comprender cada una de las afirmaciones dadas en las opciones y ver su veracidad con respecto a la semejanza de dos polígonos.

Para lo anterior, recuerde que:

Dos **polígonos** son **semejantes** si sus ángulos interiores correspondientes son congruentes y la razón entre las medidas de sus lados homólogos es constante, es decir, son proporcionales.

La diferencia entre **polígonos semejantes y congruentes** está en que los primeros solo tienen igual forma, en cambio los segundos tienen igual forma y tamaño.

- La afirmación dada en la opción A) es **falsa**, porque por ejemplo, un cuadrado de lado 1 cm es semejante a un cuadrado de lado 2 cm, donde la razón de sus lados homólogos es 1 : 2, en cambio la razón entre sus áreas es 1 : 4.

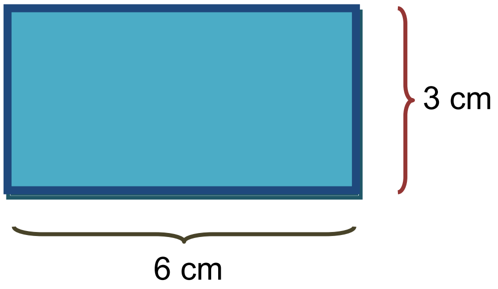
Recuerde que:

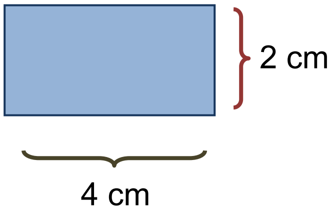
La razón entre las áreas de dos **polígonos semejantes** es igual a la razón de los cuadrados de las medidas de los lados homólogos.

- Ahora, para analizar B) se tiene que los ángulos correspondientes de los polígonos semejantes son de igual medida, por lo que la razón entre las medidas de ellos es 1 : 1, pero no necesariamente la razón entre las medidas de sus lados homólogos es igual a 1 : 1, esto solo ocurre cuando los polígonos son congruentes, por lo tanto, la afirmación en B) es **falsa**.

- De la misma manera la afirmación en C) es **falsa**, pues solo cuando la razón de semejanza es 1 : 1 los triángulos son congruentes.

- Ahora, con respecto a la afirmación D), también es **falsa**, por ejemplo, en la siguiente figura se tienen dos polígonos semejantes cuya razón de semejanza es $\frac{1}{2}$, pero no son regulares.





- Por último, para determinar la veracidad de E) se puede considerar dos polígonos semejantes, R y S, de n lados cada uno, de esta forma se tiene:

<table>
<tr><td>La medida de los n lados del polígono R son $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.</td><td>La medida de los n lados del polígono S son $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Debido a que R y S son semejantes, los lados los lados correspondientes están en una misma razón, de manera tal que $\frac{x_1}{y_1} = r$, $\frac{x_2}{y_2} = r$, $\frac{x_3}{y_3} = r$,…, $\frac{x_n}{y_n} = r$, con r un número real.</td></tr>
<tr><td>El perímetro del polígono R es:
$P_R = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$</td><td>El perímetro del polígono S es:
$P_S = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Al reemplazar $x_1 = y_1 \cdot r$, $x_2 = y_2 \cdot r$, $x_3 = y_3 \cdot r, \ldots, x_n = y_n \cdot r$ en P_R, se obtiene:
$P_R = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = y_1 \cdot r + y_2 \cdot r + y_3 \cdot r + \ldots + y_n \cdot r = r\underbrace{(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n)}_{\text{Al factorizar por r.}}$
Por lo que, la razón entre los perímetros de los polígonos es:
$\frac{P_R}{P_S} = \frac{r(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n)}{(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n)} = r$</td></tr>
</table>

Por lo anterior, la razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón entre las medidas de los lados homólogos de dichos polígonos. Luego, la afirmación en la opción E) es **verdadera**, por lo tanto, esta es la respuesta correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

Contenido: Polígonos semejantes.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: E

PREGUNTA 44

En el Δ ABC de la figura adjunta, D pertenece a $\overline{AB}$. ¿Cuál es la medida del trazo CD?

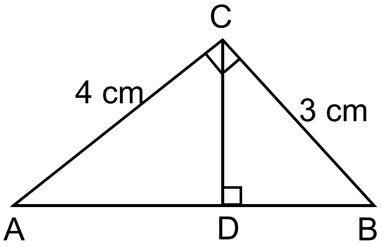
A) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ cm

B) $\frac{9}{5}$ cm

C) $\frac{12}{5}$ cm

D) $\frac{144}{25}$ cm

E) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm

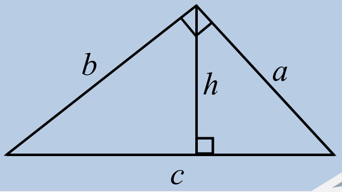


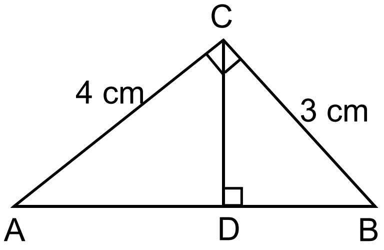
COMENTARIO

La medida del trazo CD del ∆ ABC de la figura se puede encontrar a través de las aplicaciones del Teorema de Euclides.

Recuerde que:

En un triángulo rectángulo se cumple que $h = \frac{a \cdot b}{c}$.





Como los catetos miden 3 cm y 4 cm, al aplicar el teorema de Pitágoras, se obtiene que la hipotenusa mide 5 cm.

De la figura se tiene que la medida del segmento CD es $\frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$ cm.

Por lo anterior, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

Contenido: Teorema de Euclides.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 45

En la circunferencia de la figura adjunta, las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se intersectan en P, AP = $\frac{1}{4}$ cm y PB = $\frac{4}{3}$ cm. Si PC : PD = 4 : 3, entonces la medida de la cuerda $\overline{CD}$ es

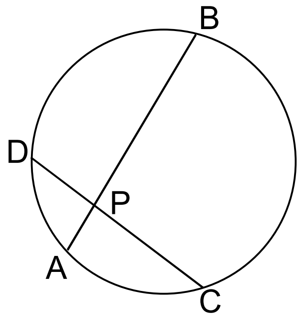
A) 7 cm

B) $\frac{7}{12}$ cm

C) $\frac{7}{8}$ cm

D) $\frac{7}{6}$ cm

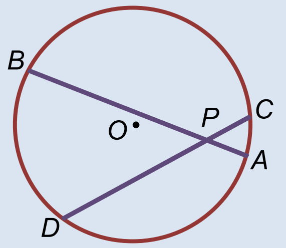
E) $\frac{13}{6}$ cm



COMENTARIO

Para encontrar la medida de la cuerda $\overline{CD}$ de la figura adjunta del problema se pueden calcular las medidas de los segmentos CP y PD, para ello se deben aplicar los teoremas sobre las relaciones métricas en la circunferencia, en particular, el que a continuación se enuncia:

Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son **cuerdas de la circunferencia** que se intersectan en el punto P, entonces $AP \cdot PB = CP \cdot PD$



Así, en la figura dada en el enunciado se debe cumplir la igualdad PB·AP = PD·PC y como se sabe del enunciado que AP = $\frac{1}{4}$ cm y PB = $\frac{4}{3}$ cm, se tiene que:

$$\frac{\cancel{4}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} = PD \cdot PC \xrightarrow{\text{simplificando}} PD \cdot PC = \frac{1}{3}$$

Por otro lado, del enunciado se sabe que $\frac{PC}{PD} = \frac{4}{3}$, lo que es implica que PC = $\frac{4 \cdot PD}{3}$. Al reemplazar esta expresión en PD · PC = $\frac{1}{3}$ y despejar PD se obtiene lo siguiente:

$$PD \cdot \frac{4 \cdot PD}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4 \cdot PD^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Multiplicando.

$$PD^2 = \frac{1}{4}$$

Multiplicando por el inverso multiplicativo de $\frac{4}{3}$ a ambos lados de la igualdad, es decir, por $\frac{3}{4}$.

$$PD = \frac{1}{2}$$

Extrayendo la raíz cuadrada.

Ahora, al reemplazar la medida de PD recién obtenida en PC = $\frac{4 \cdot PD}{3}$, se llega a que PC = $\frac{2}{3}$.

Luego, como de la figura se tiene que CD = PD + PC, se determina que:

$$CD = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$$

Valor que se encuentra en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

Contenido: Relaciones entre las cuerdas de una circunferencia.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 46

Desde un punto P del suelo se observan bajo el mismo ángulo el extremo superior de dos postes verticales al suelo, de 6 metros y 5 metros de altura. Si la distancia de P a la base del poste de 5 metros es de 3 metros, entonces la distancia de P a la base del otro poste es

A) $\frac{18}{5}$ metros.

B) 6 metros.

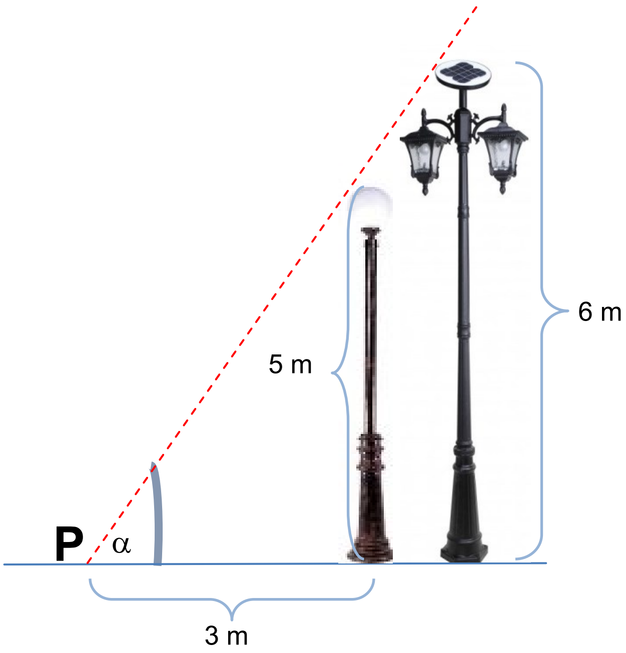
C) 4 metros.

D) 10 metros.

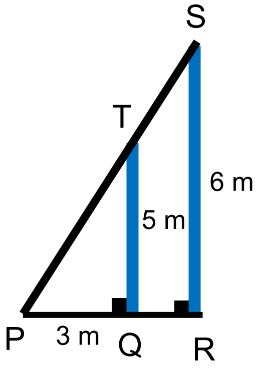
E) indeterminable con los datos dados.

COMENTARIO

Este ítem se puede resolver a través del teorema de Thales, ya que al graficar la situación dada en el enunciado se obtienen dos triángulos rectángulos semejantes. Existen varias maneras de graficar los postes y el punto del suelo, el siguiente ejemplo es uno ellos.



Si se asigna a los extremos superiores de los postes con las letras T y S, y a las bases de los postes por Q y R, donde $\overline{QT}$ // $\overline{RS}$, al ser ambos postes verticales al suelo, se obtiene la siguiente representación:



Recuerde que por el **teorema de Thales** aplicado al triángulo de la figura se tiene que:

$$\frac{PQ}{QT}=\frac{PR}{RS}$$

Como se pide la distancia de P a la base del poste mayor, es decir, PR, se reemplaza en la proporción las medidas dadas, obteniendo:

$$\frac{3}{5}=\frac{PR}{6}$$

Multiplicando por el recíproco de $\frac{1}{6}$, a ambos lados de la igualdad, que es 6.

$$\frac{6\cdot 3}{5}=PR$$

Multiplicando

$$\frac{18}{5}=PR$$

Por lo anterior, la distancia del punto P a la base del poste de 6 metros es $\frac{18}{5}$ metros, siendo la respuesta correcta la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala.

Contenido: Teorema de Thales.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 47

En la figura adjunta, el triángulo ABC es isósceles, D y E son puntos en la base $\overline{BC}$. Se puede determinar que Δ ABD $\cong$ Δ ACE, si se sabe que:

(1) El triángulo ADE es isósceles.

(2) $\sphericalangle$ BAD = $\sphericalangle$ EAC

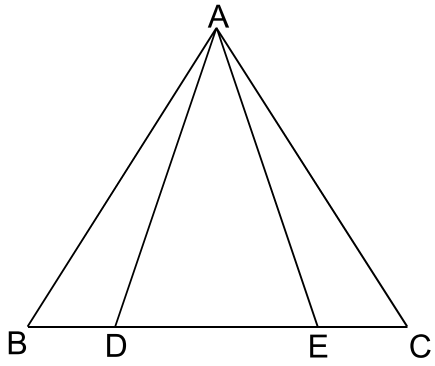
A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

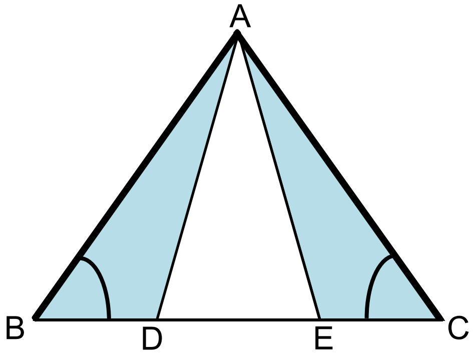
E) Se requiere información adicional



COMENTARIO

Para dar respuesta al ítem se debe analizar si con las condiciones dadas en el enunciado, junto a las dadas en (1) y/o en (2) se puede determinar que los triángulos ABD y ACE son congruentes.

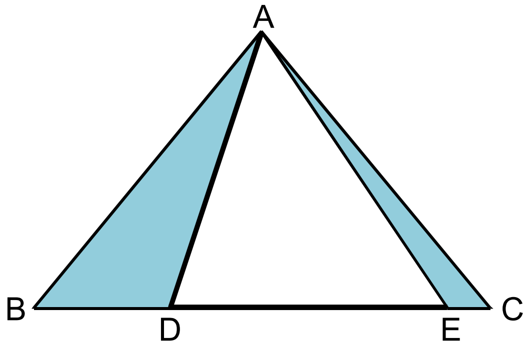
Del enunciado se tiene que el Δ ABC es isósceles de base $\overline{BC}$, luego AB = AC y ∢ ABC = ∢ ACB, que serían dos pares de lados comunes entre los triángulos ABD y ACE.



Recuerde que dos **triángulos** son **congruentes** si sus ángulos y sus lados correspondientes tienen igual medida.

Uno de los **criterios de congruencia** que permite determinar si dos triángulos lo son, es el ángulo-lado-ángulo (**ALA**) que señala que si dos triángulos tienen dos pares de ángulos de igual medida y el lado comprendido entre ellos también de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

En (1) se dice que el Δ ADE es isósceles, pero no se indica cuáles son los pares de lados de igual medida, por lo que se pueden dar tres posibilidades: AD = DE o AE = DE o AD = AE. Luego, con esta condición es imposible determinar que Δ ABD ≅ Δ ACE, al no saber nada de la medida de los otros pares de ángulos de los triángulos. Un ejemplo, es el que se muestra a continuación, donde AD = DE:



En (2) se señala que ∢ BAD = ∢ EAC. Con esta condición se tiene que los triángulos ABD y ACE tienen dos pares de ángulos congruentes y los lados comprendidos entre dichos ángulos de igual medida, luego por el criterio de congruencia de triángulos ALA, los triángulos ABD y ACE son congruentes.

Como solo con la condición dada en (2) se determina que Δ ABD $\cong$ Δ ACE, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Conocer y utilizar conceptos y propiedades asociados al estudio de la congruencia de figuras planas, para resolver problemas y demostrar propiedades.

Contenido: Criterios de congruencia de triángulos.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: B

PREGUNTA 48

En la circunferencia de centro O, $\overline{PS}$ y $\overline{PR}$ la intersectan en los puntos Q, S y R, el punto O está en $\overline{PS}$ y T está en la circunferencia, tal como se muestra en la figura adjunta. Si la medida de $\overline{PQ}$ es igual al radio de la circunferencia y $\measuredangle$ SPR = 10°, entonces la medida del $\measuredangle$ QTS es

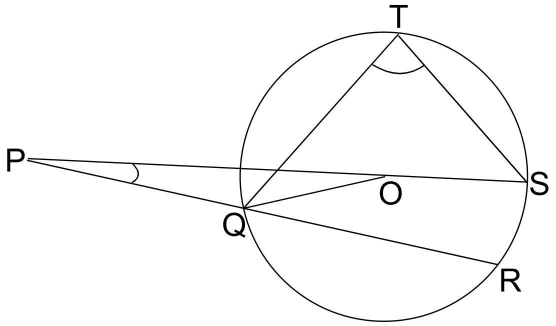
A) 70°

B) 90°

C) 80°

D) 75°

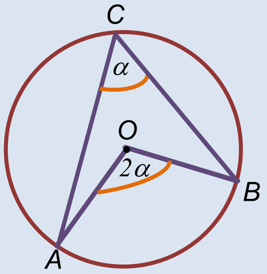
E) 85°



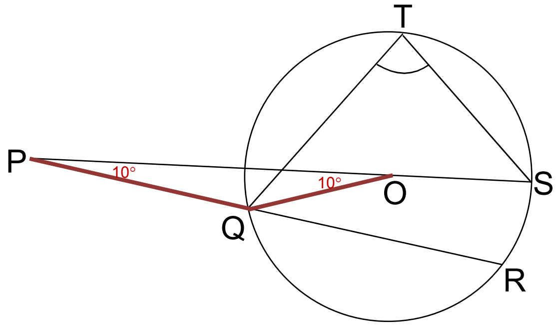
COMENTARIO

Una manera de encontrar la medida del $\measuredangle$ QTS es aplicando el teorema del ángulo inscrito en una circunferencia, el que se detalla a continuación:

En toda circunferencia, la medida de un **ángulo inscrito** es igual a la mitad de la medida del **ángulo del centro** que subtiende al mismo arco.



Ahora, del enunciado se tiene que en la figura se cumple que PQ = QO, ya que $\overline{QO}$ es radio de la circunferencia, por lo tanto, el Δ PQO es isósceles de base $\overline{OP}$, obteniendo que ∢ OPQ = ∢ POQ = 10°, como se muestra en la siguiente figura:



De lo anterior, y como ∢ QOS es un ángulo exterior del Δ POQ, se tiene

$$\sphericalangle \text{ QOS} = 180 - 10 = 170°.$$

Luego, aplicando el teorema del ángulo inscrito, se obtiene que

$$\sphericalangle \text{ QTS} = \frac{1}{2} \sphericalangle \text{ QOS} = \frac{170}{2} = 85°.$$

Valor que se encuentra en la opción E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.

Contenido: Teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito.

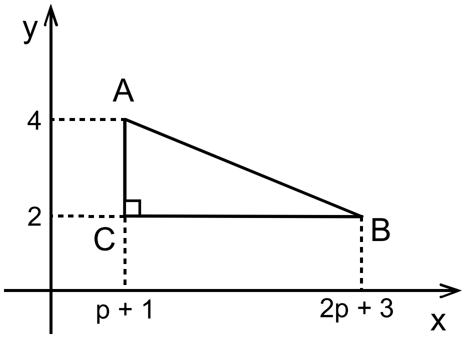
Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 49

En la figura adjunta el triángulo ABC tiene sus catetos paralelos a los ejes coordenados. Si AB = $2\sqrt{10}$ unidades y p > 0, entonces las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$ son

A) (3, 1)
B) (8, 3)
C) (14, 3)
D) (3, 3)
E) (4, 3)



COMENTARIO

Para la resolución de esta pregunta se puede aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos en el plano y así, determinar el punto medio del segmento AB.

Recuerde que si se tienen dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la **distancia** entre estos **puntos** está dada por la fórmula

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Recuerde que el **punto medio** entre los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, está dada por la fórmula $M_{\overline{PQ}} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Ahora, como los catetos del triángulo ABC de la figura son paralelos a los ejes coordenados se tiene que las coordenadas de los vértices son A(p + 1, 4), B(2p + 3, 2) y C(p + 1, 2). Además, se tiene que la distancia entre A y B es $2\sqrt{10}$ unidades, por lo que se puede escribir la siguiente igualdad, aplicando la fórmula de distancia:

$$d_{AB} = \sqrt{((p+1)-(2p+3))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-p-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{(p+2)^2 + 4} = 2\sqrt{10}$$

Ahora, al elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad $\sqrt{(p+2)^2 + 4} = 2\sqrt{10}$ se tiene que:

$(p+2)^2 + 4 = 40$

Sumando –4 a ambos lados de la igualdad.

$(p+2)^2 = 40 - 4 = 36$

Sacando raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad.

$p + 2 = \pm 6,$

$p = 6 - 2 = 4$

Como p > 0

Al reemplazar **p = 4** en las coordenadas de los puntos A y B, se obtiene:

A(**p** + 1, 4) = **A(5, 4)**

B(2**p** + 3, 2) = **B(11, 2)**

Aplicando la fórmula de punto medio en el segmento AB se tiene:

$$\left(\frac{5+11}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = \left(\frac{16}{2}, \frac{6}{2}\right) = \mathbf{(8, 3)}$$

Luego, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 50

¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a la recta que contiene a $\overline{PQ}$ en la figura adjunta?

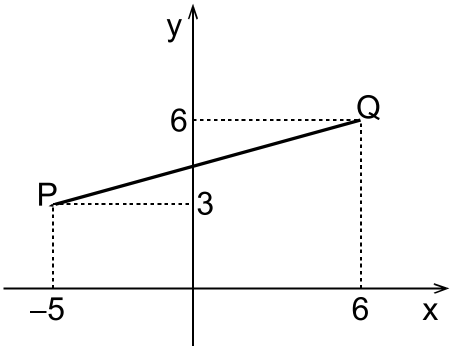
A) x – 9y – 48 = 0

B) x – 9y + 48 = 0

C) 3x – 11y + 48 = 0

D) 11x – 3y – 46 = 0

E) 9x – y – 48 = 0



COMENTARIO

Para determinar la ecuación de la recta que contiene al segmento PQ de la figura se puede aplicar la fórmula de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

Recuerde que:

Dados dos puntos $M(x_1, y_1)$ y $N(x_2, y_2)$, la **ecuación de la recta** que los contiene está dada por $(y - y_1) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

De la figura se tiene que las coordenadas de los puntos P y Q son (–5, 3) y (6, 6), respectivamente.

Luego, la ecuación de la recta que contiene al segmento PQ, es

$$(y - 6) = \frac{6 - 3}{6 + 5}(x - 6)$$

Sumando.

$$(y - 6) = \frac{3}{11}(x - 6)$$

Multiplicando por el recíproco de $\frac{1}{11}$ a ambos lados de la igualdad, es decir, por 11.

$$11y - 66 = 3(x - 6)$$

$$11y - 66 = 3x - 18$$

Distribuyendo por 3.

Igualando a 0.

$$3x - 11y + 48 = 0$$

Por lo tanto, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

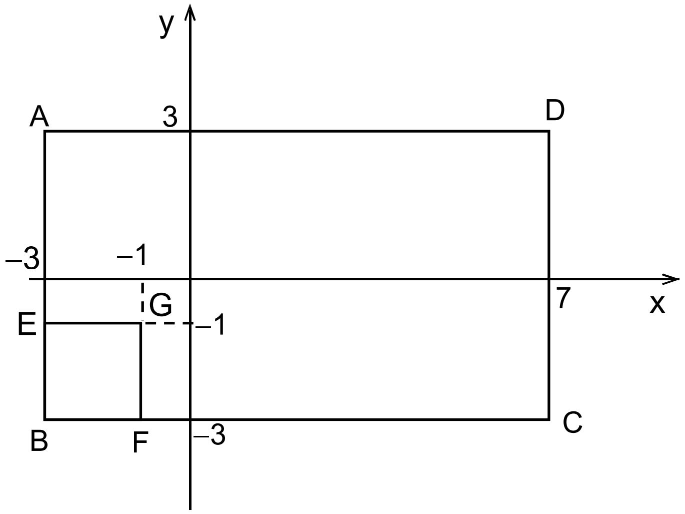
Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 51

Al cuadrado EBFG de la figura adjunta, se le aplica una homotecia de modo que los vértices de la figura resultante no están en el exterior del rectángulo ABCD. Si E pertenece al segmento AB, F pertenece al segmento BC y la figura resultante de la homotecia posee la mayor área bajo estas condiciones, ¿cuál de las siguientes opciones puede representar el centro y la razón de homotecia, respectivamente?

A) G y 2
B) G y 3
C) D y –3
D) B y –6
E) B y 3



COMENTARIO

Para resolver el problema se debe determinar en cuál de las opciones está representado el centro y la razón de homotecia que permite determinar un cuadrado homotético del cuadrado EBFG bajo las condiciones dadas en el enunciado.

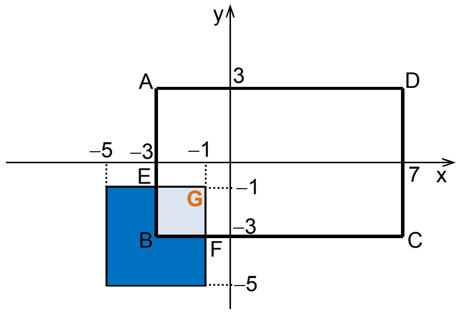
Así, en el enunciado se indica que la figura homotética del cuadrado EBFG no debe estar en el exterior del rectángulo ABCD y que, además, debe poseer la mayor área bajo esta condición. Para esto, recuerde que:

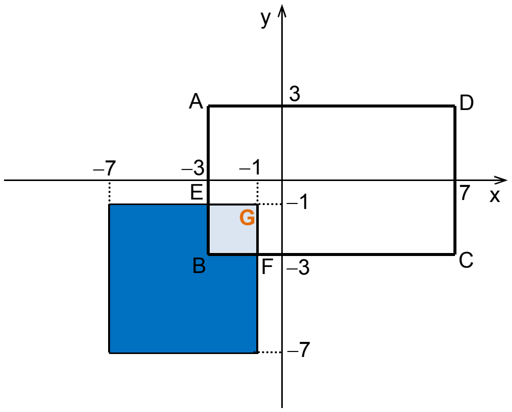
> Una **Homotecia** es la transformación de una figura en otra semejante a ella, con respecto a un punto en el plano llamado centro de homotecia y a una razón dada llamada razón de homotecia, tal que cualquier segmento de la figura es paralelo al segmento correspondiente en la figura homotética.

Ahora, al aplicar las homotecias indicadas en cada una de las opciones se obtiene lo que se muestra en las siguientes figuras, donde el cuadrado en azul es el homotético de EBFG, según la homotecia señalada:

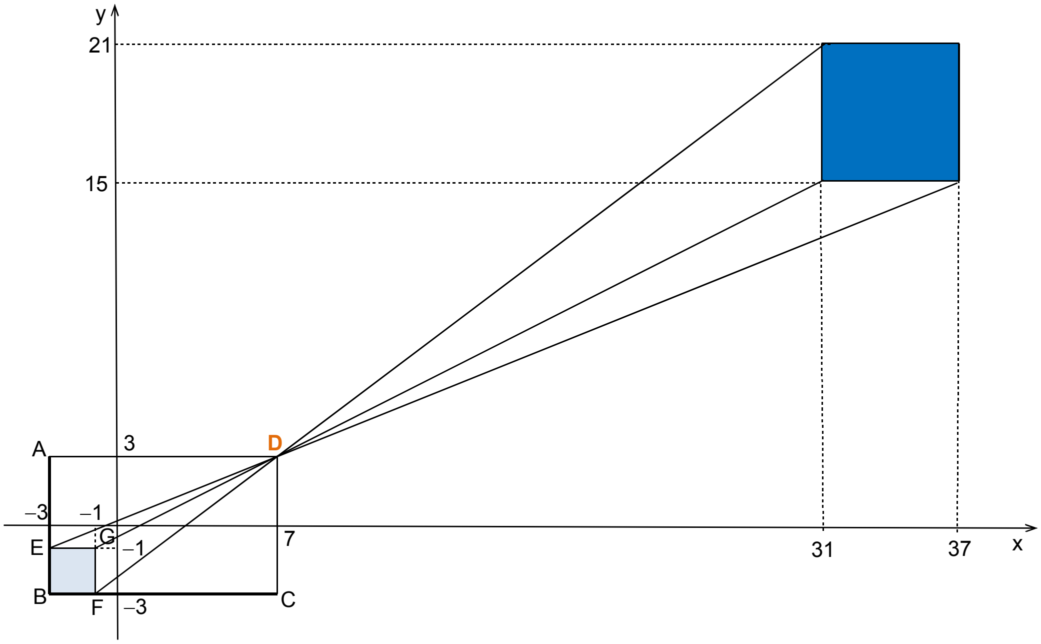
Opción A) Centro: G y Razón: 2

Opción B) Centro: G y Razón: 3

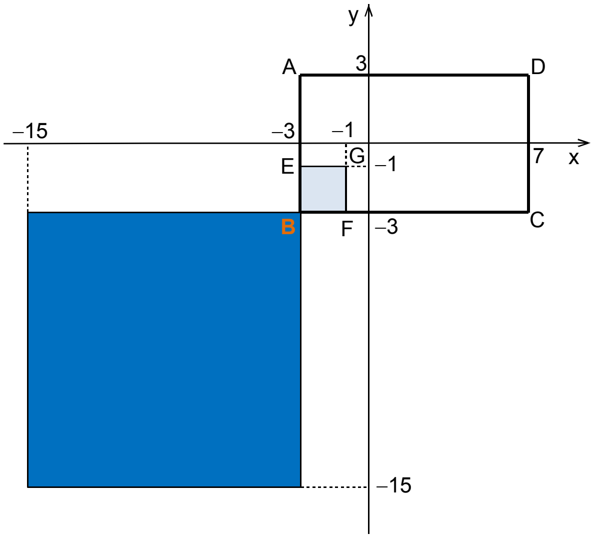




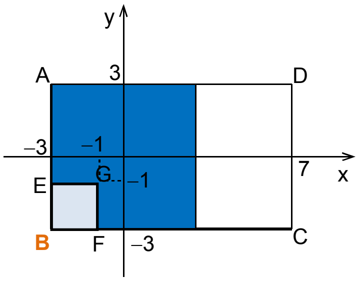
Opción C) Centro: D y Razón: –3



Opción D) Centro: B y Razón: –6



Opción E) Centro: B y Razón: 3



Al observar las figuras precedentes se ve que en B), C) y D) se obtiene un cuadrado que está parcial o totalmente en el exterior del rectángulo ABCD, por lo que no pueden ser la clave. Ahora, entre los cuadrados obtenidos en A) y en E), es este último el que posee la mayor área, por lo que la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Proporcional

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Homotecia de figuras planas.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 52

Sea la recta L de ecuación $y = mx + n$. Si $m \neq 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La recta de ecuación $y = mx + p$, con $p \neq n$, se puede obtener mediante una traslación de la recta L.

II) La recta de ecuación $y = tx + n$, se puede obtener mediante una rotación centrada en (0, n) de la recta L.

III) La recta de ecuación $y = 2mx + 2n$, se puede obtener mediante una traslación de la recta L.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y III

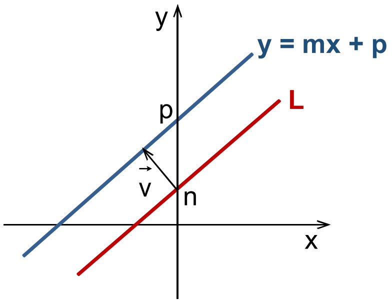
COMENTARIO

En este ítem se debe determinar la veracidad de las afirmaciones planteadas en I), en II) y en III), teniendo en consideración la recta **L** dada en el enunciado de ecuación **$y = mx + n$**, con $m \neq 0$.

Recordar que:

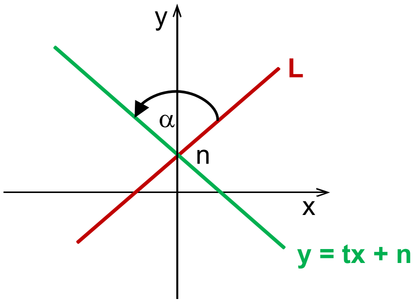
En la **ecuación de una recta** escrita de la forma $y = ax + q$, se tiene que a es la pendiente de la recta y q la ordenada del punto en que la recta intersecta al eje y.

En I) se tiene que la recta de ecuación **y = mx + p** tiene igual pendiente que la recta **L**, pero intersecta en un punto distinto al eje y, por lo que las rectas son paralelas tal como se representa en el ejemplo de la siguiente figura, que es uno de varios casos:



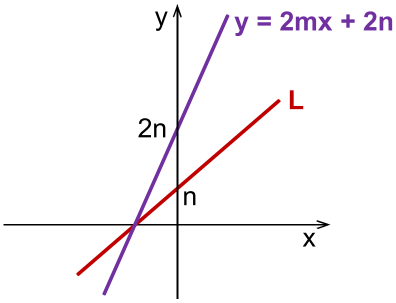
Luego, la recta de ecuación **y = mx + p** se puede obtener de una traslación de la recta **L**, por ejemplo, según el vector $\vec{v}$ dado en la figura, por lo que la afirmación en I) es **verdadera**.

En II) se tiene que la recta de ecuación **y = tx + n** intersecta al eje y en el mismo punto que la recta **L**, pero tienen pendientes distintas, como se representa en el ejemplo de la siguiente figura:



De la figura se puede observar que la recta de ecuación **y = tx + n** se puede obtener, por la rotación en el ángulo formado por las dos rectas (α) en sentido antihorario de la recta **L** y en torno al punto (0, n), por lo que la afirmación en II) es **verdadera**.

En III) que se tiene la recta de ecuación **y = 2mx + 2n** tiene una pendiente que es el doble de la pendiente de la recta **L** e intersecta al eje y en un punto cuya ordenada es el doble de la ordenada del punto en que la recta **L** intersecta al eje y, como se representa, en el siguiente ejemplo:



En la figura anterior se observa que la recta de ecuación **y = 2mx + 2n** no se puede obtener de una traslación de la recta **L**, ya que no son paralelas, luego la afirmación en III) es **falsa**.

Como solo las afirmaciones en I) y en II) son verdaderas, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas.

Contenido: Interpretación de la pendiente y del intercepto de una recta con el eje de las ordenadas.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: C

PREGUNTA 53

Sea la recta L_1 de ecuación $y = m_1x + p$ y la recta L_2 de ecuación $y = m_2x + q$. Si m_1 y p son números reales positivos, ¿con cuál de las siguientes condiciones la solución del sistema formado por L_1 y L_2 **siempre** pertenece al primer cuadrante?

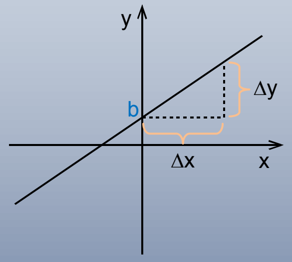
A) $m_2 > 0$ y $q > p$
B) $m_2 > 0$ y $p > q$
C) $m_2 = 0$ y $q < p$
D) $m_2 < m_1$ y $q < 0$
E) $m_2 < 0$ y $q > p$

COMENTARIO

Para determinar qué condiciones de las dadas en las opciones permite que la solución del sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones que representan a las rectas L_1 y L_2 pertenezca al primer cuadrante se debe recordar que:

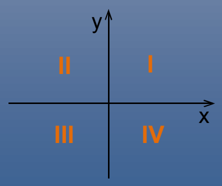
1) La **solución de un sistema de ecuaciones lineales** corresponde al punto de intersección de las rectas representadas por las ecuaciones de dicho sistema.

2) En una recta de ecuación $y = ax + b$, a es la **pendiente** de la recta y b es su **coeficiente de posición**, es decir, a la ordenada del punto donde la recta intersecta al eje y.

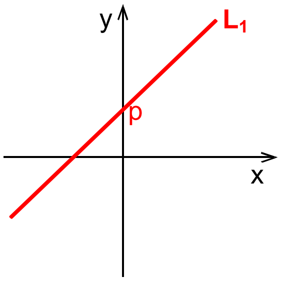


$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

3) En el plano cartesiano los **cuadrantes** se enumeran como se muestra a continuación:



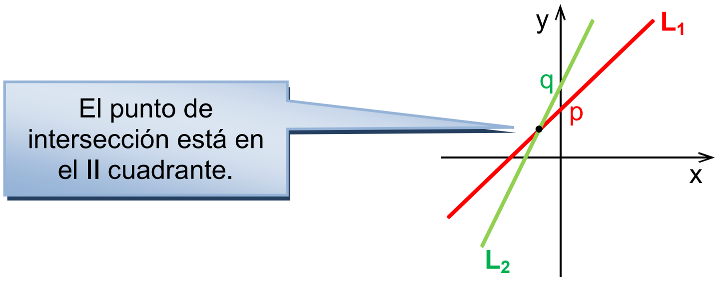
De las rectas presentadas en el enunciado se tiene que la ecuación de la recta L_1 es $y = m_1x + p$, con $m_1 > 0$ y $p > 0$, donde la siguiente figura es una posible representación gráfica de esta recta en el plano cartesiano:



Recuerde que una recta de pendiente positiva forma un ángulo menor a *90°* con el eje *x*.

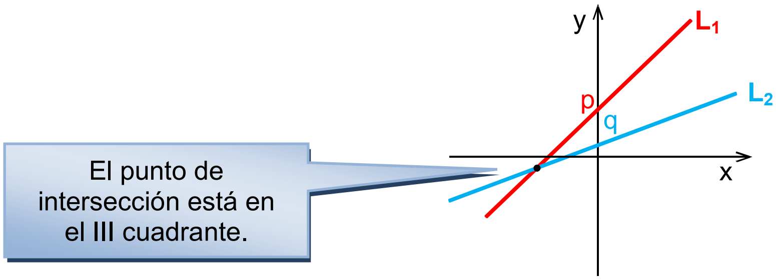
Ahora, al analizar las condiciones dadas para m_2 y q en las opciones se tiene que:

- En A) se indica que $m_2 > 0$ y $q > p$, por lo que se podría dar la solución representada en la siguiente figura:



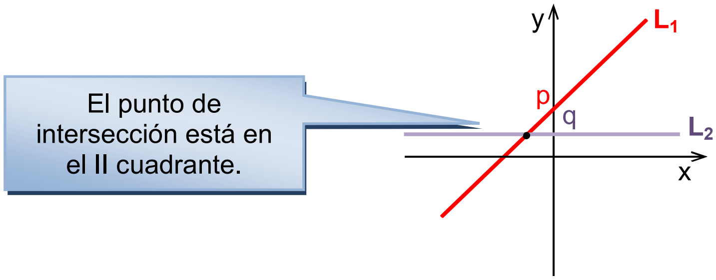
El punto de intersección está en el II cuadrante.

- En B) se afirma que $m_2 > 0$ y $p > q$, por lo que se puede dar la situación que se muestra a continuación:



El punto de intersección está en el III cuadrante.

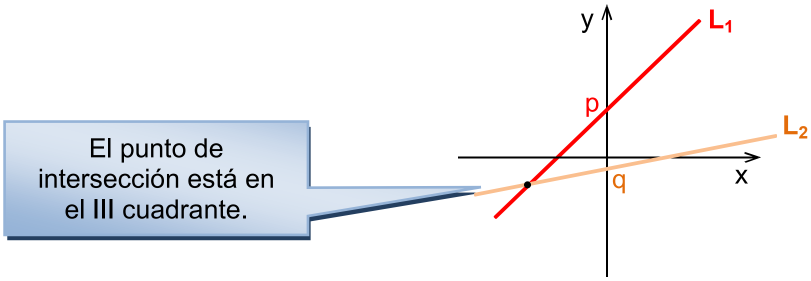
- En C) se señala que $m_2 = 0$ y $q < p$, por lo que puede ocurrir lo que a continuación se representa:



El punto de intersección está en el II cuadrante.

Recuerde que una recta de pendiente *0* es paralela al eje *x*.

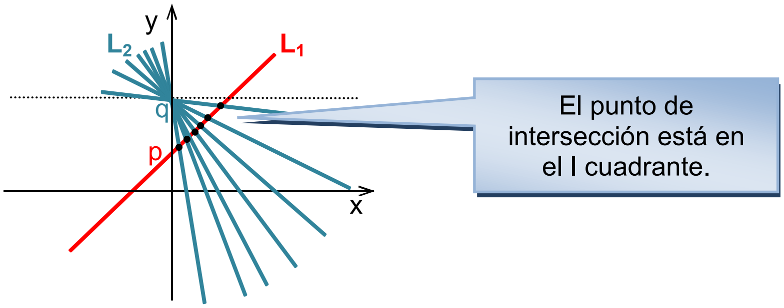
- En D) se indica que $m_2 < m_1$ y $q < 0$, por lo que se puede dar lo siguiente:



El punto de intersección está en el III cuadrante.

Por último, en E) se tiene que $m_2 < 0$ y $q > p$, luego la representación de distintas posibles rectas para L_2 que cumplen la condición dada se muestra en la siguiente figura, donde se observa que la intersección de estas rectas con L_1 es imposible que se intersecten en un cuadrante distinto al que se muestra:

Recuerde que una recta de pendiente negativa forma un ángulo mayor a *90°* con el eje *x*.



El punto de intersección está en el I cuadrante.

En base al desarrollo anterior, se llega a que la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Establecer la relación entre la representación gráfica de rectas en el plano cartesiano y los sistemas de ecuaciones a que dan origen.

Contenido: Análisis gráfico de las soluciones de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su interpretación a partir de las posiciones relativas de rectas en el plano.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 54

Se obtiene un solo cono recto si se hace girar indefinidamente un

I) triángulo isósceles en torno a su eje de simetría.
II) triángulo rectángulo en torno a un determinado cateto.
III) cuadrado en torno a una de sus diagonales.

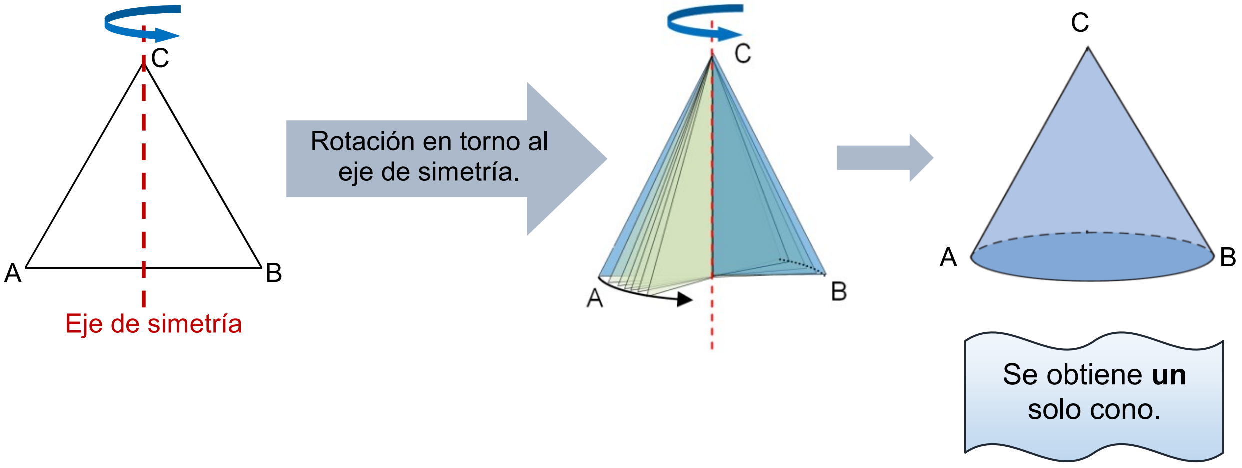
Es (son) verdadera(s)

A) solo II.
B) solo III.
C) solo I y II.
D) solo II y III.
E) I, II y III.

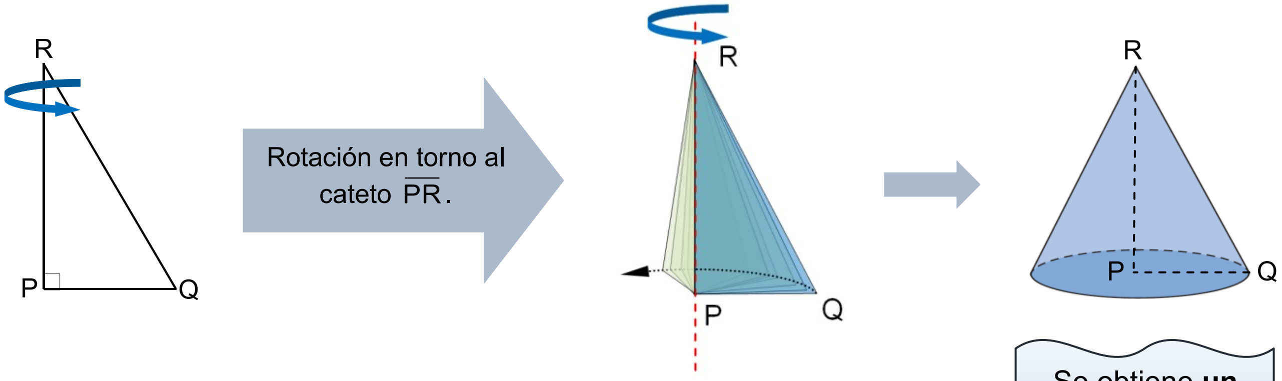
COMENTARIO

Para resolver esta pregunta se debe determinar el cuerpo geométrico que se genera al hacer girar indefinidamente las figuras dadas en I), en II) y en III) en torno al eje mencionado en cada caso y luego, identificar si este corresponde o no a un solo cono recto.

En I) se tiene un triángulo isósceles como, por ejemplo, el Δ ABC de la siguiente figura, donde AC = BC:

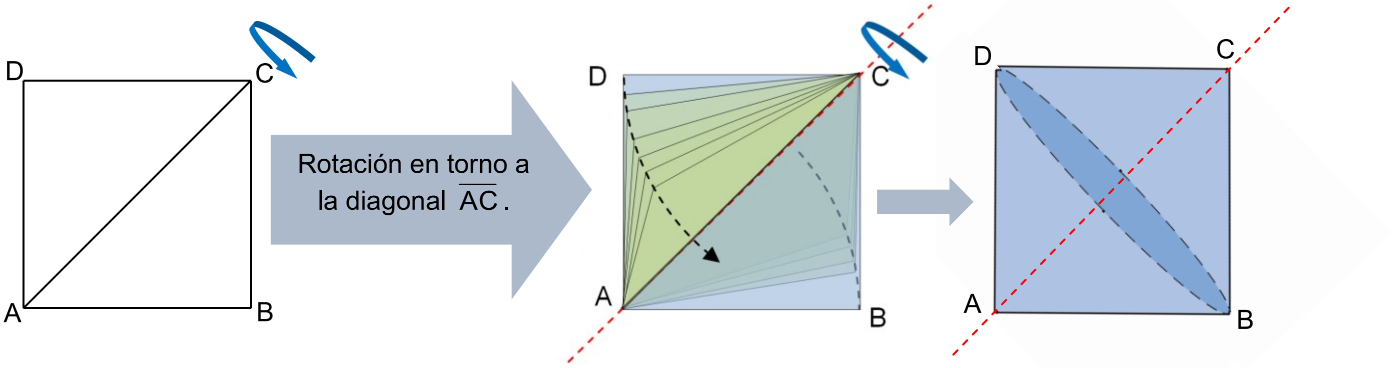


En II) se tiene un triángulo rectángulo como, por ejemplo, el Δ PQR de la figura que se muestra a continuación, donde $\overline{PR}$ es el cateto que se usa como eje de rotación:



Se obtiene **un** solo cono.

En III) se tiene un cuadrado, como por ejemplo, el que se muestra en la siguiente figura, donde $\overline{AC}$ es una de sus diagonales:



Se obtienen una figura formada por **dos** conos de base común.

Como solo en I) y en II) se obtiene un solo cono, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.

Contenido: Cuerpos geométricos generados a partir de rotaciones de figuras planas en el espacio.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: C

PREGUNTA 55

¿Cuál es la distancia entre los puntos A(5, 1, 3) y B(8, –5, 1)?

A) 11 unidades

B) $\sqrt{189}$ unidades

C) $\sqrt{11}$ unidades

D) $\sqrt{29}$ unidades

E) 7 unidades

COMENTARIO

Para resolver el ítem se debe determinar la distancia entre los dos puntos A y B, dados en el enunciado.

Recuerde que:

Dado los puntos en el espacio de coordenadas $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$, la **distancia** (d) entre ellos se puede determinar a través de la fórmula:

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

De esta forma, la distancia entre los puntos A(5, 1, 3) y B(8, –5, 1) se calcula de la siguiente manera:

$$d_{AB} = \sqrt{(5-8)^2+(1-(-5))^2+(3-1)^2} \longrightarrow \text{Reemplazando las coordenadas de los puntos en la fórmula.}$$

$$= \sqrt{(-3)^2+6^2+2^2} \longrightarrow \text{Realizando las sustracciones.}$$

$$= \sqrt{9+36+4} \longrightarrow \text{Calculando las potencias.}$$

$$= \sqrt{49} \longrightarrow \text{Realizando la suma.}$$

$$= 7 \longrightarrow \text{Calculando el valor de la raíz.}$$

Luego, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

Contenido: Distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 56

Se tiene un cuadrilátero de vértices (2, p), (2, 0), (10, 0) y (10, 5p), con p un número real positivo. Si el volumen del cuerpo generado al rotar indefinidamente este cuadrilátero en torno al eje de las abscisas es $\frac{8\pi}{3}$ unidades cúbicas, entonces p es

A) $\frac{1}{\sqrt{31}}$ unidades.

B) $\frac{1}{5}$ unidades.

C) $\frac{1}{\sqrt{19}}$ unidades.

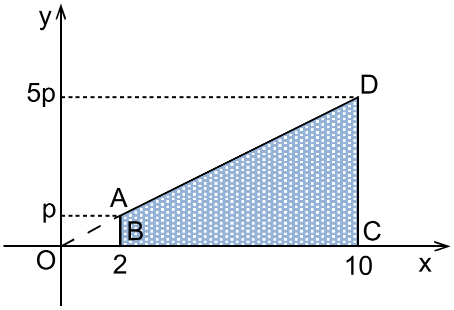
D) $\frac{1}{\sqrt{28}}$ unidades.

E) indeterminable con los datos dados.

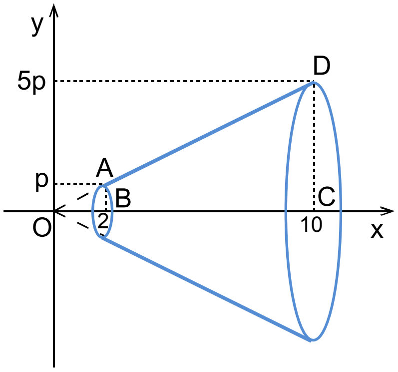
COMENTARIO

Para determinar el valor de p que cumple con las condiciones dadas en el enunciado del problema, se puede ubicar los puntos en un plano cartesiano, luego identificar el tipo de cuadrilátero que es y a continuación, el cuerpo que se generará al rotar dicho cuadrilátero en forma indefinida en torno al eje de las abscisas (x).

Así, al ubicar los puntos A(2, p), B(2, 0), C(10, 0) y D(10, 5p), con p > 0, en el plano cartesiano y girar el cuadrilátero en torno al eje x se tiene:



El cuadrilátero es un trapecio rectángulo



Al rotar indefinidamente el trapecio en torno al eje x se obtiene un tronco de cono

Recuerde que:

La pendiente m del segmento que pasa por los puntos

(x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

De lo anterior, se tiene que el segmento AD tiene pendiente $\dfrac{5p - p}{10 - 2} = \dfrac{4p}{8} = \dfrac{p}{2}$ y que el segmento OA tiene pendiente $\dfrac{p - 0}{2 - 0} = \dfrac{p}{2}$. Luego, como los segmentos AD y OA tienen igual pendiente, los puntos O, A y D son colineales, es decir, están en una misma línea recta.

Ahora, se determinará una expresión que represente el volumen del tronco de cono, para determinar el valor de p.

Así, como el punto O(0, 0) pertenece a la recta AD, se tiene que el volumen del tronco de cono se puede calcular como la diferencia entre el volumen del cono de radio basal CD = 5p unidades y altura OC = 10 unidades y el volumen del cono de radio basal BA = p unidades y altura OB = 2 unidades.

Recuerde que:

El volumen V de un cono de radio basal r y altura h se calcula a través de la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

En la siguiente tabla se determina el volumen de los conos y del tronco de cono, en función de p:

Cuerpo geométrico	Volumen
Cono de radio basal 5p	$\frac{1}{3}\pi(5p)^2 \cdot 10 = \frac{1}{3}\pi 25p^2 \cdot 10 = \frac{250}{3}\pi p^2$
Cono de radio basal p	$\frac{1}{3}\pi(p)^2 \cdot 2 = \frac{2}{3}\pi p^2$
Tronco de cono	$\frac{250}{3}\pi p^2 - \frac{2}{3}\pi p^2 = \frac{248}{3}\pi p^2$

Como en el enunciado se indica que el volumen del tronco de cono es $\frac{8\pi}{3}$, se puede plantear la siguiente ecuación, de donde se despeja p:

$$\frac{248}{3}\pi p^2 = \frac{8\pi}{3}$$

$$p^2 = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{3}{248\pi}$$

Multiplicando por el reciproco de $\frac{248}{3}\pi$ a ambos lados de la igualdad, es decir, por $\frac{3}{248\pi}$.

$$p^2 = \frac{1}{31}$$

Realizando la multiplicación entre las fracciones.

$$p = \frac{1}{\sqrt{31}}$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad.

Valor que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.

Contenido: Volumen de cuerpos generados por rotación de figuras planas.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 57

Se tienen dos rectas en el plano, L_1 y L_2, cuyas ecuaciones son L_1: $(x, y) = t(-3, a + 1) + (1, b)$ y L_2: $(x, y) = s\left(\frac{1}{2}, b - 1\right) + (1, a)$, con s y t números reales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) Si $a + 1 = b - 1$, entonces L_1 es paralela a L_2.

B) Si $ab = -1$, entonces L_1 es perpendicular a L_2.

C) L_1 intersecta al eje y en b.

D) Si $(a + 1)(b - 1) = \frac{3}{2}$, entonces L_1 es perpendicular a L_2.

E) El punto $\left(\frac{1}{2}, b - 1\right)$ pertenece a la recta L_2.

COMENTARIO

Una forma de determinar cuál de las afirmaciones dadas en las opciones es verdadera con respecto a las rectas L_1 y L_2, es la que se presenta a continuación, donde se debe recordar que:

- ❖ En la **ecuación de una recta** en el plano escrita de la forma $(x, y) = (p, q)\lambda + (m, n)$, se tiene que (p, q) es un vector director de dicha recta, (m, n) es un vector posición de la recta y λ pertenece al conjunto de los números reales.

- ❖ Si $d(d_1, d_2)$ es un **vector director** de una recta en el plano, entonces la pendiente m de dicha recta está dada por $m = \frac{d_2}{d_1}$.

Se designará por m_1 y m_2 a las pendientes de L_1 y L_2 dadas en el enunciado, respectivamente.

De las definiciones anteriores se obtiene lo siguiente:

Rectas	Vector director	Pendiente
L_1: (x, y) = t(–3, a + 1) + (1, b)	(–3, a + 1)	$m_1 = \frac{a+1}{-3}$
L_2: (x, y) = $s\left(\frac{1}{2}, b-1\right) + (1, a)$	$\left(\frac{1}{2}, b-1\right)$	$m_2 = \frac{b-1}{\frac{1}{2}} = 2(b-1)$

Ahora, recuerde que:

- ❖ Dos **Rectas** son **paralelas** si tienen igual pendiente.

En A), se tiene que a + 1 = b – 1, luego $m_2 = 2(b - 1) = 2(a + 1)$ y como $m_1 = \frac{a+1}{-3}$, se obtiene que las pendientes de ambas rectas **no** siempre son iguales, por lo que, L_1 **no es siempre** paralela a L_2, llegando a que la afirmación en A) es **falsa**.

Como en B) se afirma que si ab = –1, entonces L_1 y L_2 son perpendiculares, recuerde que:

- ❖ Dos **Rectas** son **perpendiculares** si el producto de sus pendientes es igual a -1.

Así, teniendo que ab = –1, se obtiene que b = $-\frac{1}{a}$ y reemplazando esta expresión en m_2 se llega a

$$m_2 = 2(b - 1) = 2\left(-\frac{1}{a}-1\right) = 2\left(\frac{-1-a}{a}\right) = \frac{-2(1+a)}{a}$$

Luego, $m_1 \cdot m_2 = \frac{a+1}{-3} \cdot \frac{-2(1+a)}{a} = \frac{2(1+a)^2}{3a}$, expresión que **no** es igual a –1 para cualquier valor de a, por lo que la afirmación en B) es **falsa**.

Por otro lado, para verificar la afirmación dada en C), recuerde que:

- Una recta que intersecta al eje y lo hace en un punto de la forma *(0, n)*.

Del enunciado se tiene que la ecuación de L_1 es

$$(x, y) = t(-3, a + 1) + (1, b)$$

$$(x, y) = (-3t, t(a + 1)) + (1, b) \longrightarrow$$

Al ponderar por t el vector director.

$$(x, y) = (-3t + 1, t(a + 1) + b) \longrightarrow$$

Al sumar los dos vectores.

Como se supone que la recta L_1 intersecta al eje y en b, se tiene que lo intersecta en un punto de la forma (0, b), por lo que (0, b) = (–3t + 1, t(a + 1) + b).

De donde se tiene que

$$-3t + 1 = 0$$
$$t(a + 1) + b = b$$

Así, de la primera igualdad se obtiene que t = $\frac{1}{3}$ y al reemplazar este valor en la segunda igualdad se llega a $\frac{1}{3}(a + 1) + b = b$, igualdad que no se cumple para cualquier valor de a, por lo que la afirmación en C) es **falsa**.

En D) se pide verificar que L_1 y L_2 sean perpendiculares bajo ciertas condiciones, así, si $(a + 1)(b - 1) = \frac{3}{2}$, se tiene que $(b - 1) = \frac{3}{2(a+1)}$ y al reemplazar esta expresión en m_2 se llega a

$$m_2 = 2(b - 1) = \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}(a+1)} = \frac{3}{(a+1)}$$

Luego, $m_1 \cdot m_2 = \frac{a+1}{-3} \cdot \frac{3}{(a+1)} = -1$, lo que implica que L_1 y L_2 son siempre perpendiculares, por lo que la afirmación en D) es **verdadera**.

Por último, en E) se señala que el punto $\left(\frac{1}{2}, b-1\right)$ pertenece a la recta L_2, lo cual es **falso**, porque $\left(\frac{1}{2}, b-1\right)$ es el vector director de esta recta y este vector no tiene por qué pertenecer a la recta, puede ser paralelo a ella.

Por el desarrollo anterior, se obtiene que la opción correcta es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.

Contenido: Ecuación vectorial de la recta.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

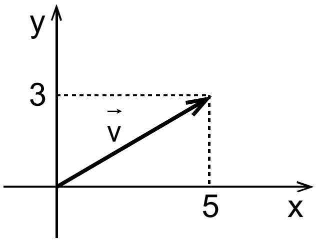
Clave: D

PREGUNTA 58

Se pueden determinar las coordenadas del extremo de un vector dado $\vec{u}$, que tiene la misma dirección y origen que $\vec{v}$ de la figura adjunta, si se sabe que:

(1) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo sentido.
(2) El módulo de $\vec{u}$ es igual al doble del módulo de $\vec{v}$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional



COMENTARIO

Para determinar si con la información dada en el enunciado junto a las dadas en (1) y/o en (2) se puede encontrar las coordenadas de $\vec{u}$, se debe recordar que:

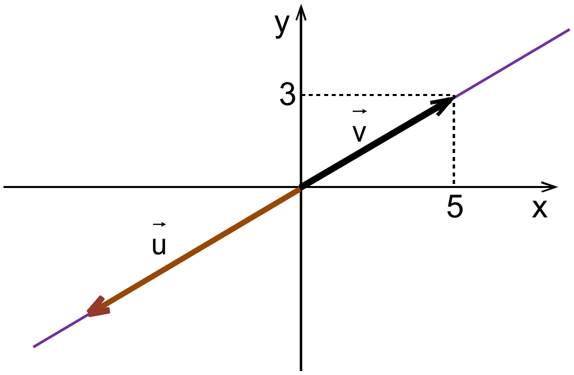
Los principales elementos de un vector son:

Magnitud o módulo: distancia entre el origen y el extremo del vector.

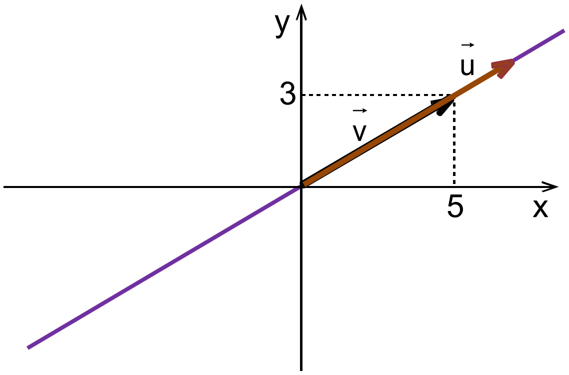
Dirección: puede interpretarse como la inclinación de la recta que contiene al vector con respecto a la horizontal.

Sentido: hacia donde se realiza el desplazamiento, indicado por el extremo que corresponde a la punta de la flecha.

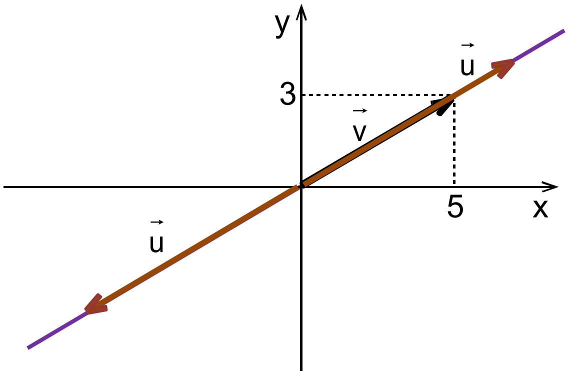
Del enunciado se tiene que el vector $\vec{u}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$, es decir, pertenece a la misma recta que contiene a $\vec{v}$ y además, ambos vectores tienen el mismo origen, la siguiente figura es un ejemplo de esta situación:



Con la información dada en (1) se tiene que ambos vectores tienen el mismo sentido, pero no se pueden determinar las coordenadas del punto extremo de $\vec{u}$, pues no se conoce su magnitud, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:



Ahora, con (2) se tiene que el módulo de $\vec{u}$ es el doble del módulo de $\vec{v}$, por lo tanto, se puede determinar dos puntos extremos, uno con el mismo sentido de $\vec{v}$ y el otro con sentido contrario a $\vec{v}$, luego la información en (2) es insuficiente para responder la pregunta. Un ejemplo de lo que se tiene en este caso es lo que se muestra a continuación:



Ahora, al juntar las informaciones de (1) y de (2) se conoce el sentido y la magnitud del vector, por lo tanto, es posible determinar las coordenadas del extremo del vector.

Por el análisis anterior, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Geometría

Área Temática: Geometría Posicional y Métrica

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.

Contenido: Representación gráfica de vectores en el plano cartesiano.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: C

PREGUNTA 59

El número de todas las posibles muestras distintas, sin orden y sin reposición, de tamaño 3 que se pueden formar con un total de 9 elementos, es

A) 9
B) 729
C) 27
D) 84
E) 504

COMENTARIO

Para determinar el número de todas las posibles muestras distintas, sin orden y sin reposición, de tamaño 3 que se pueden formar con un total de 9 elementos se puede calcular a través del número combinatorio $\binom{9}{3}$.

Recuerde que:

El total de **combinaciones** distintas que se pueden formar con n elementos de un total de m elementos, sin orden y sin reposición, es $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$.

Además, el **factorial** de un número p es el producto de los primeros p números enteros positivos consecutivos, es decir, $p! = p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot 1$.

Luego, $\binom{9}{3} = \dfrac{9!}{(9-3)!\cdot 3!} = \dfrac{9!}{6!\cdot 3!} = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot (3\cdot 2\cdot 1)} = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$

Valor que se encuentra en la opción D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población.

Contenido: Número de muestras de un tamaño dado, que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, sin reemplazo.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 60

A un grupo de mujeres se le preguntó acerca de su masa corporal. Sus respuestas se resumen en el histograma de la figura adjunta, donde los intervalos son de la forma $[a, b[$ y el último de la forma $[c, d]$. Según la información del gráfico es verdadero que,

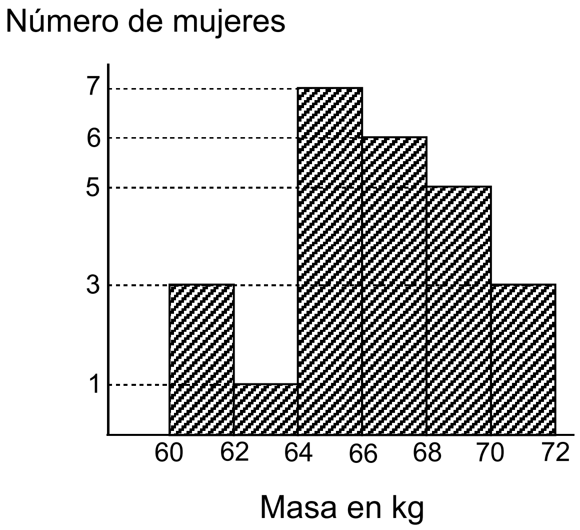
A) 7 mujeres fueron entrevistadas en total.

B) exactamente un 50% de las mujeres entrevistadas tiene una masa corporal que está en el intervalo $[64, 70[$.

C) la mediana de las masas corporales está en el intervalo $[66, 68[$.

D) las modas de las masas corporales son 65 kg y 71 kg.

E) solo una de las mujeres entrevistadas tiene una masa corporal menor que 64 kg.



COMENTARIO

En esta pregunta se requiere comprender las afirmaciones dadas en las opciones, para relacionarlas con la información del histograma de la figura y así, determinar cuál de ellas es la verdadera.

La afirmación en A) es **falsa**, ya que 7 mujeres son las que tienen una masa corporal perteneciente al intervalo $[64, 66[$, en cambio, el total de mujeres entrevistadas corresponde a la suma de las frecuencias de cada una de las barras del histograma, es decir, 3 + 1 + 7 + 6 + 5 + 3 = 25.

Ahora, la cantidad de mujeres entrevistadas que tienen una masa corporal que está en el intervalo $[64, 70[$ es $7 + 6 + 5 = 18$ y para determinar a qué porcentaje del total de 25 mujeres entrevistadas corresponde, se puede proceder planteando una proporción, de la siguiente forma:

$$\frac{25}{100} = \frac{18}{x}$$

Se multiplican cruzados los términos de la proporción.

$$25x = 1.800$$

Se multiplica por el recíproco de 25 a ambos lados de la igualdad, es decir, por $\frac{1}{25}$.

$$x = \frac{1.800}{25}$$

Se realiza la división.

$$x = 72\%$$

Así, la afirmación en B) es **falsa**.

Por otro lado, recuerde que:

> La **Mediana** de un conjunto de datos agrupados en un histograma es el punto que divide al histograma en dos partes de igual área.

De esta manera, en el gráfico se observa que hasta la masa corporal de 66 kg hay $3 + 1 + 7 = 11$ mujeres, menos del 50% de los datos y que hasta la masa corporal de 68 kg hay $3 + 1 + 7 + 6 = 17$ mujeres, más del 50% de los datos, por lo que en el intervalo $[66, 68[$ se encuentra la mediana, luego la afirmación en C) es **verdadera**.

También, recuerde que:

> La **Moda** de un conjunto de datos es el dato que tiene mayor frecuencia.

Del histograma no se puede determinar la masa de mayor frecuencia, pues solo se conocen los intervalos donde se agrupan los datos, por lo que la afirmación en D) es **falsa**.

Por último, la afirmación en E) también es **falsa**, pues hay tres mujeres que tienen una masa corporal que está en el intervalo $[60, 62[$ y una mujer que tienen una masa corporal que está en el intervalo $[62, 64[$, por lo que hay 4 mujeres que tienen una masa corporal menor a 64 kg.

Por el desarrollo anterior, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Contenido: Obtención de información a partir del análisis de los datos presentados en histogramas.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: C

PREGUNTA 61

En un estudio se registró en una tabla de datos agrupados el tiempo de duración en horas de un lote de ampolletas y con estos datos se construyó la ojiva de la figura adjunta. De acuerdo a este gráfico se puede deducir que

I) 97 ampolletas fueron registradas en el estudio.

II) la mayor cantidad de ampolletas duró entre 300 y 400 horas.

III) la mediana del número de horas de duración de las ampolletas se encuentra en el intervalo $[200, 300[$.

Es (son) verdadera(s)

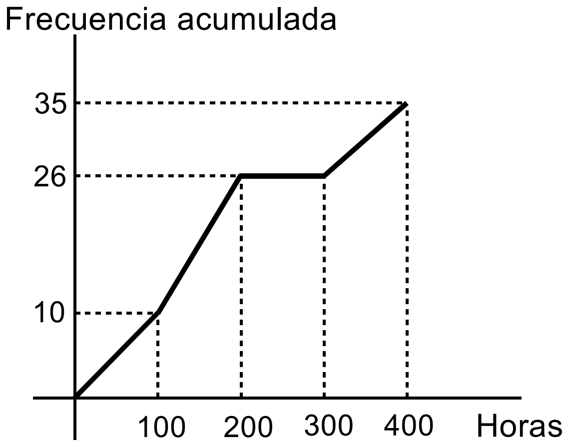
A) solo I.

B) solo II.

C) solo III.

D) solo I y III.

E) ninguna de ellas.



COMENTARIO

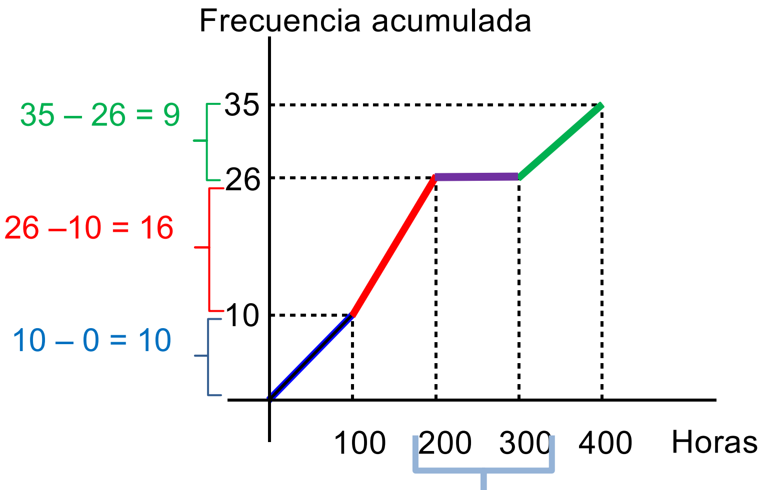
Para poder determinar cuál de las afirmaciones se pueden deducir de los datos de la ojiva, se deben interpretar los datos que se representan en ella.

En I) se afirma que “97 ampolletas fueron registradas en el estudio”. Esto es **falso**, ya que el último dato de la frecuencia acumulada es 35, lo que corresponde al total de ampolletas que fueron registradas en el estudio.

En II) se afirma que “la mayor cantidad de ampolletas duró entre 300 y 400 horas”, para determinar la veracidad de la afirmación se puede escribir la tabla de frecuencia que se desprende del gráfico, tal como se muestra a continuación:

Recuerde que:

De un gráfico de **frecuencia acumulada** se puede obtener la frecuencia de un intervalo, al restar la frecuencia acumulada del extremo inferior y superior de un intervalo.

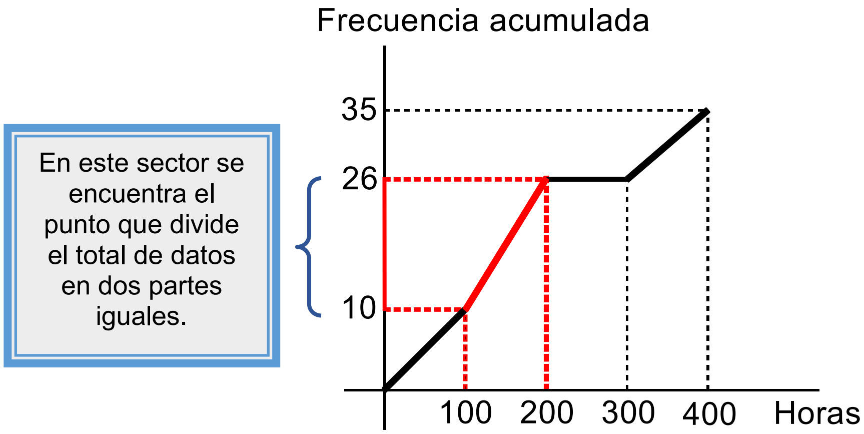


Se puede observar que en el intervalo [200, 300[hay un segmento horizontal, esto significa que no existen datos en ese intervalo, ya que su frecuencia es cero.

Tiempo de duración de las ampolletas	Frecuencia
[0, 100[	10
[100, 200[	16
[200, 300[	0
[300, 400]	9

Por lo tanto, la mayor cantidad de ampolletas se encuentra en el intervalo [100, 200[, lo que implica que la afirmación en II) es **falsa**.

La afirmación en III) también es **falsa**, pues la mediana del número de horas se encuentra en el intervalo donde se acumula hasta el 50% de los datos, y hasta el dato 100 se han acumulado 10 ampolletas, aproximadamente el 28,6% del total de las ampolletas y hasta el dato 200 se han acumulado 26 ampolletas, aproximadamente el 74,3% del total de las ampolletas, como se muestra a continuación:



Por lo tanto, la mediana se encuentra en el intervalo $[100, 200[$.

De esta forma, la opción correcta es E), ya que ninguna afirmación es verdadera.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Contenido: Obtención de información a partir del análisis de los datos presentados en polígonos de frecuencias acumuladas.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: E

PREGUNTA 62

La tabla adjunta muestra algunos datos que corresponden a una encuesta sobre el porcentaje de satisfacción por un producto, que manifestó el total de personas encuestadas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Un 50% de los encuestados tiene una satisfacción que pertenece al intervalo $[75, 80[$.

B) Ninguna de las personas encuestadas tiene un 100% de satisfacción por el producto.

C) 50 personas contestaron la encuesta.

D) 18 personas expresaron menos del 75% de satisfacción por el producto.

E) El intervalo modal es $[80, 85[$.

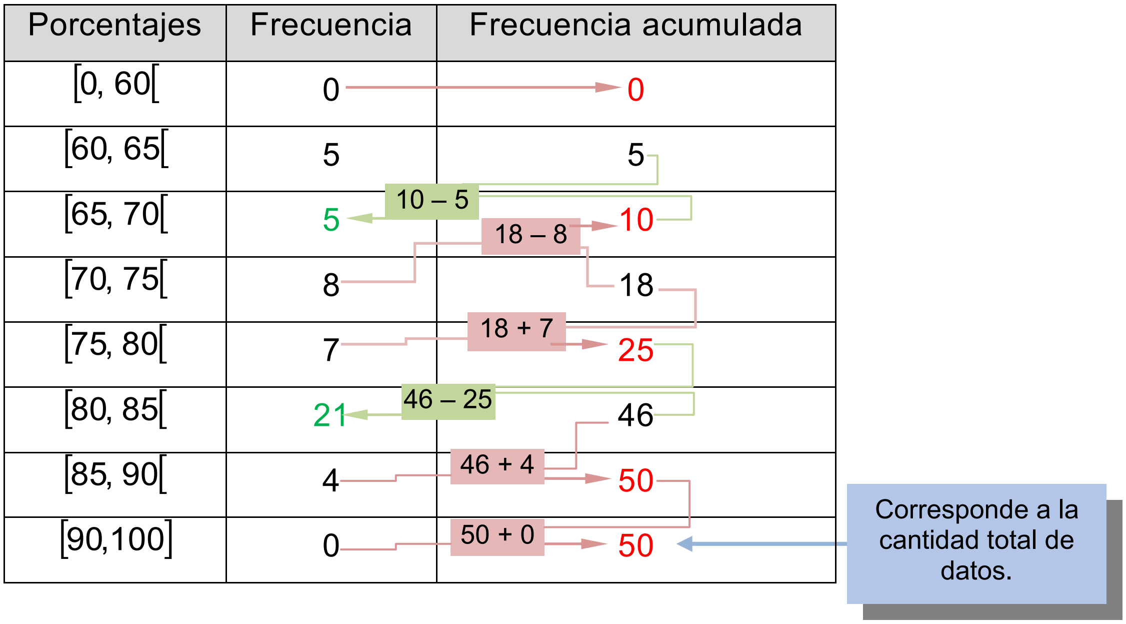
Porcentajes	Frecuencia	Frecuencia acumulada
$[0, 60[$	0	
$[60, 65[$	5	5
$[65, 70[$		
$[70, 75[$	8	18
$[75, 80[$	7	
$[80, 85[$		46
$[85, 90[$	4	
$[90,100]$	0	

COMENTARIO

Una forma de determinar cuál de las afirmacionesdadas en las opciones es **FALSA**, es completar los datos que faltan en la tabla de frecuencia.

Recuerde que:

La **Frecuencia Acumulada** se determina sumando las frecuencias de todos los valores inferiores o iguales al valor considerado.



Porcentajes	Frecuencia	Frecuencia acumulada
$[0, 60[$	0	0
$[60, 65[$	5	5
$[65, 70[$	5	10
$[70, 75[$	8	18
$[75, 80[$	7	25
$[80, 85[$	21	46
$[85, 90[$	4	50
$[90,100]$	0	50

Corresponde a la cantidad total de datos.

De esta forma se puede determinar que la afirmación en A) es **falsa**, porque en el intervalo $[75, 80[$ se encuentran 7 datos. Por lo tanto, 7 datos de los 50 corresponden a $\frac{7}{50} \cdot 100 = 14\%$ y no a un 50%.

La afirmación en B) es **verdadera**, pues se puede observar en la tabla que la frecuencia del intervalo $[90,100]$ es 0, por lo que no puede existir una persona que tenga el 100% de satisfacción.

La afirmación en C) es **verdadera**, puesto que 50 personas contestaron la encuesta.

Por otro lado, en la tabla se observa que la frecuencia acumulada hasta el intervalo $[70, 75[$ es de 18 personas, es decir, hay 18 personas que tienen una satisfacción que es menor al 75%, por lo tanto, la afirmación en D) es **verdadera**.

Para determinar la veracidad de la afirmación en E), recuerde que:

El **Intervalo Modal** es el intervalo de mayor frecuencia.

La afirmación en E) es **verdadera**, debido a que la mayor frecuencia es 21, la cual corresponde al intervalo $[80, 85[$.

De esta manera, la opción correcta es A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.

Contenido: Organización y representación de datos.

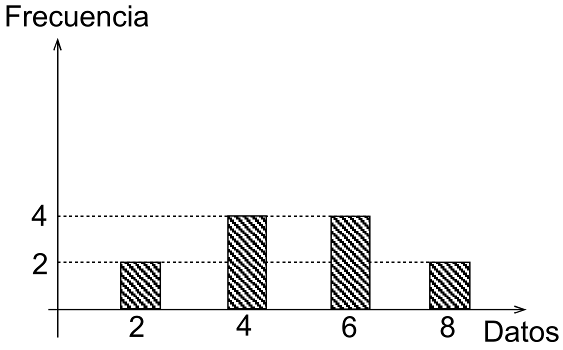
Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

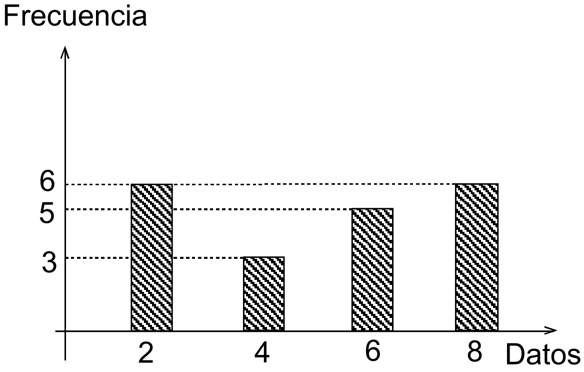
PREGUNTA 63

¿Cuál de los siguientes gráficos representa a un conjunto de datos con media igual a 5 y primer cuartil igual a 2?

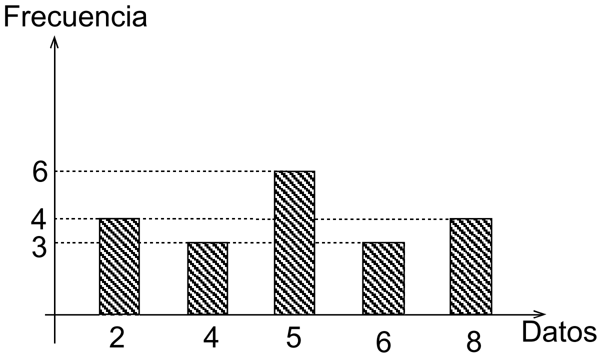
A)



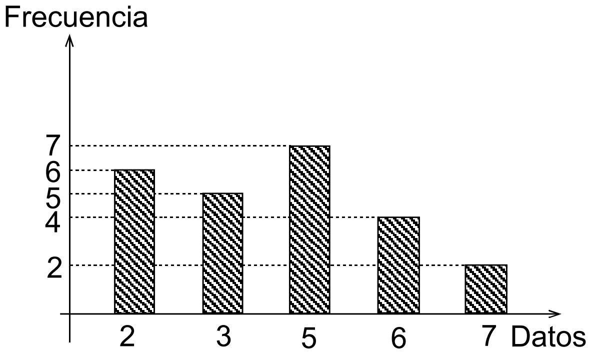
B)



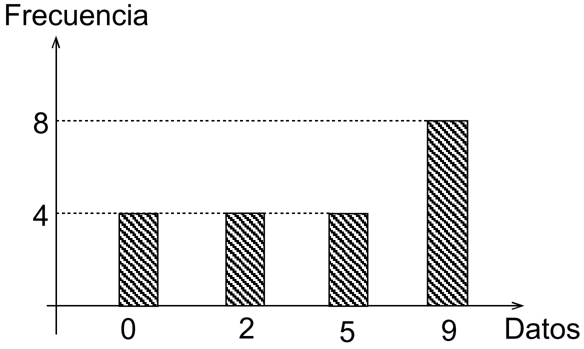
C)



D)



E)



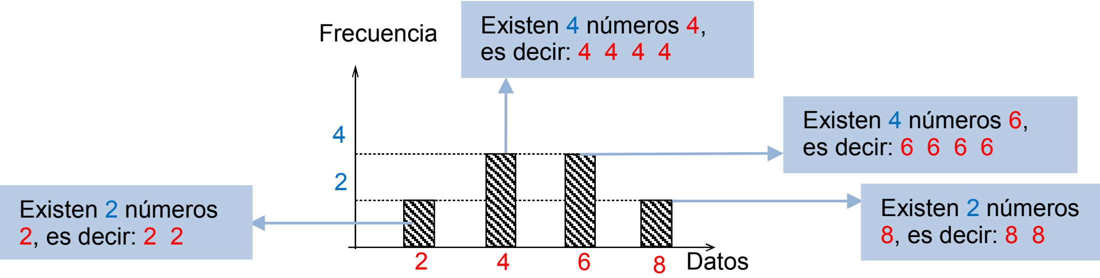
COMENTARIO

Para responder la pregunta se debe determinar la media y el primer cuartil en cada gráfico, por lo que se debe recordar que:

La **media** o **promedio** de un conjunto de datos corresponde a la suma de todos los datos, divididos por el total de datos.

El **primer cuartil** de un conjunto de datos ordenados de menor a mayor, corresponde al valor del **percentil 25**, el cual es un valor que deja por debajo de él a aproximadamente el 25% de los datos y deja sobre él a aproximadamente al 75% de los datos. Para n datos, una forma de determinar el primer cuartil es considerar que este se ubica en el dato $k=\frac{25}{100}(n+1)$, si k es entero el primer cuartil corresponde al valor del dato, si no, corresponde al promedio de los dos datos más cercanos a él.

En A) se tiene que:



Existen 4 números 4, es decir: 4 4 4 4

Existen 4 números 6, es decir: 6 6 6 6

Existen 2 números 2, es decir: 2 2

Existen 2 números 8, es decir: 8 8

Luego, al ordenar los datos de menor a mayor se llega a: 2 2 4 4 4 4 6 6 6 6 8 8.

Promedio	Primer cuartil
$\frac{2+2+4+4+4+4+6+6+6+6+8+8}{12}=\frac{60}{12}=5$	Como son 12 datos, el primer cuartil corresponde al número ubicado en el lugar k = $\frac{25}{100}(12+1)$= 3,5. En los datos, se tiene lo siguiente: $2\quad 2\quad \underset{\overset{\uparrow}{3°}}{4}\quad \underset{\overset{\uparrow}{4°}}{4}\quad 4\quad 4\quad 6\quad 6\quad 6\quad 6\quad 8\quad 8$ Por lo tanto, el primer cuartil corresponde al promedio entre el 3° y 4° número, es decir, 4.

De la misma forma que en el caso anterior, se pueden determinar los datos presentados en el gráfico de B), los cuales son: 2 2 2 2 2 2 4 4 4 6 6 6 6 6 8 8 8 8 8 8.

Promedio	Primer cuartil
La suma de todos los datos es 102, por lo tanto, el promedio es igual a $\frac{102}{20} \approx 5{,}1$	Como son 20 datos, el primer cuartil corresponde al número ubicado en el lugar k = $\frac{25}{100}(20+1) =$ 5,25. En los datos se tiene lo siguiente: 2 2 2 2 2 2 4 4 4 6 6 6 6 6 8 8 8 8 8 8 ↑ ↑ 5° 6° Por lo tanto, el primer cuartil corresponde al promedio entre el 5° y 6° número, es decir, 2.

Los datos en C) son: 2 2 2 2 4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 6 8 8 8 8.

Promedio	Primer cuartil
La suma de todos los datos es 100, por lo tanto, el promedio es igual a $\frac{100}{20} = 5$	Como son 20 datos, el primer cuartil corresponde al número ubicado en el lugar k = $\frac{25}{100}(20+1) =$ 5,25. En los datos se tiene lo siguiente: 2 2 2 2 4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 6 8 8 8 8. ↑ ↑ 5° 6° Por lo tanto, el primer cuartil corresponde al promedio entre el 5° y 6° número, es decir, 4.

Por su parte, los datos en D) son: 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 7 7.

Promedio	Primer cuartil
La suma de todos los datos es 100, por lo tanto, el promedio es igual a $\frac{100}{24} \approx 4{,}17$	Como son 24 datos, el primer cuartil corresponde al número ubicado en el lugar k = $\frac{25}{100}(24+1) =$ 6,25. En los datos se tiene lo siguiente: 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 5 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 ↑ ↑ 6° 7° Por lo tanto, el primer cuartil corresponde al promedio entre el 6° y 7° número, es decir, 2,5.

Por último, los datos en E) son: 0 0 0 0 2 2 2 2 5 5 5 5 9 9 9 9 9 9 9 9.

Promedio	Primer cuartil
La suma de todos los datos es 100, por lo tanto el promedio es igual a $\frac{100}{20} = 5$	Como son 20 datos, el primer cuartil corresponde al número ubicado en el lugar k = $\frac{25}{100}(20+1) = 5{,}25$. En el conjunto de datos se tiene lo siguiente: $0\;0\;0\;0\;\underset{\underset{5°}{\uparrow}}{2}\;\underset{\underset{6°}{\uparrow}}{2}\;2\;2\;5\;5\;5\;5\;9\;9\;9\;9\;9\;9\;9\;9$ Por lo tanto, el primer cuartil corresponde al promedio entre el 5° y 6° número, es decir, 2.

Luego, los datos en E) **tiene la media** igual a 5 y **el primer cuartil** igual a 2, por lo que es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

Contenido: Medidas de tendencia central y de posición.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 64

Sea la población P = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Si desde P se extraen todas las muestras posibles, sin reposición y sin orden, de tamaño 9, y a cada una de ellas se les calcula su promedio, ¿cuál es la suma de todos estos promedios?

A) 55
B) $55\cdot 5$
C) 5
D) $5{,}5\cdot 5$
E) 50

COMENTARIO

Para encontrar la suma de todos los promedios de todas las muestras de tamaño 9, se debe recordar que:

- El **total de muestras** distintas, sin reposición y sin orden, de tamaño n que se pueden extraer desde una población de m elementos es $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$
- Además, el **factorial de un número** p es el producto de los primeros p números enteros positivos consecutivos, es decir, $p! = p\cdot(p-1)\cdot(p-2)\cdot\ldots\cdot 1$.
- El **Promedio** de un conjunto de datos es igual a la suma de todos los datos dividido por la cantidad de datos.
- El promedio del promedio de todas las muestras de igual tamaño extraídas desde una población, es igual al promedio de todos los datos de dicha población.

De esta forma, del enunciado se tiene que m = 11 y n = 9, y reemplazando estos valores en la fórmula respectiva se tiene:

$$\binom{11}{9} = \frac{11!}{(11-9)!\cdot 9!}$$

$$= \frac{11\cdot 10\cdot \cancel{9!}}{2!\cdot \cancel{9!}}$$

$$= \frac{11\cdot \cancel{10}}{1\cdot \cancel{2}} = 11\cdot 5 = 55$$

Al desarrollar el factorial 11! como 11 ·10 ·9!, para simplificar con el 9! del denominador.

Por lo tanto, todas las muestras posibles, sin reposición y sin orden, de tamaño 9, que se pueden extraer de la población P son 55.

Si la suma de los promedios de las 55 muestras de tamaño 9 es Q, entonces el promedio de estos promedios es $\frac{Q}{55}$.

Ahora, el promedio de la población P es $\frac{0+1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{11} = \frac{55}{11} = 5$.

Y como $\frac{Q}{55}$ es igual al promedio de la población P, se obtiene $\frac{Q}{55} = 5$, es decir, Q = 55 · 5.

De esta forma, la opción correcta corresponde a B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población.

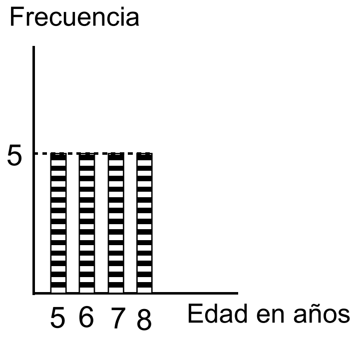
Contenido: Relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población, sin reemplazo.

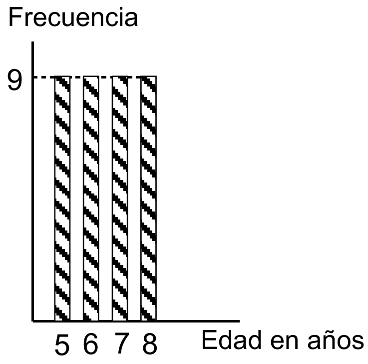
Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 65

El profesor de estadística muestra a sus alumnos los siguientes gráficos:





Les pide a Mariela, Roxana y Alejandro que saquen conclusiones de la información que contienen estos gráficos.

- Mariela dice: la edad promedio en cada gráfico es la misma.
- Roxana dice: la varianza de las edades es igual en ambos gráficos.
- Alejandro dice: en ambos gráficos la mediana de las edades es la misma.

¿Cuál(es) de los alumnos ha(n) dicho una conclusión verdadera?

A) Solo Mariela
B) Solo Roxana
C) Solo Alejandro
D) Solo Mariela y Roxana
E) Mariela, Roxana y Alejandro

COMENTARIO

Para dar respuesta a la pregunta se deben interpretar los gráficos y analizar las conclusiones que realizan Mariela, Roxana y Alejandro.

Así, para determinar si lo que dice Mariela es cierto, se debe recordar que:

El **promedio** de un conjunto de datos corresponde a la suma de todos los datos divididos por el total de datos.

De los gráficos se obtiene lo siguiente:

Gráfico 1

Aquí, se tiene que existen **5** datos para la edad de 5 años, de 6 años, de 7 años y de 8 años, por lo tanto, la cantidad total de datos es igual a **5**·4 = 20.

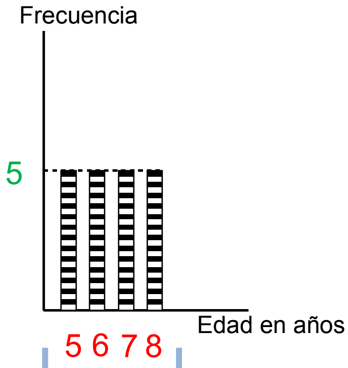
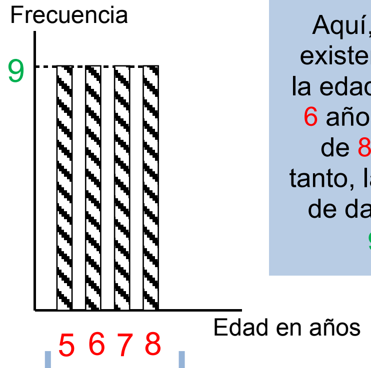


Gráfico 2



Aquí, se tiene que existen **9** datos para la edad de 5 años, de 6 años, de 7 años y de 8 años, por lo tanto, la cantidad total de datos es igual a **9**·4 = 36.

De esta forma el promedio de las edades que se muestra en cada gráfico es:

Gráfico 1	Gráfico 2
$\overline{x} = \frac{5\cdot(5+6+7+8)}{20} = \frac{130}{20} = 6,5$	$\overline{x} = \frac{9\cdot(5+6+7+8)}{36} = \frac{234}{36} = 6,5$

De lo anterior, el promedio de los datos de las edades presentadas en ambos gráficos es la misma, luego lo que dice Mariela es **verdadero**.

Ahora, una manera de determinar si lo que dice Roxana es verdadero, es calcular la varianza de las edades en ambos gráficos.

Recuerde que:

La **varianza** σ^2 de un conjunto de n datos se puede calcular como $\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \left(\overline{x}\right)^2$,

donde $\sum f_i x_i^2$ es la suma del cuadrado de cada uno de x_i por su frecuencia f_i y $\overline{x}$ es el promedio del conjunto de datos.

Así, la varianza de las edades que se muestra en cada gráfico es:

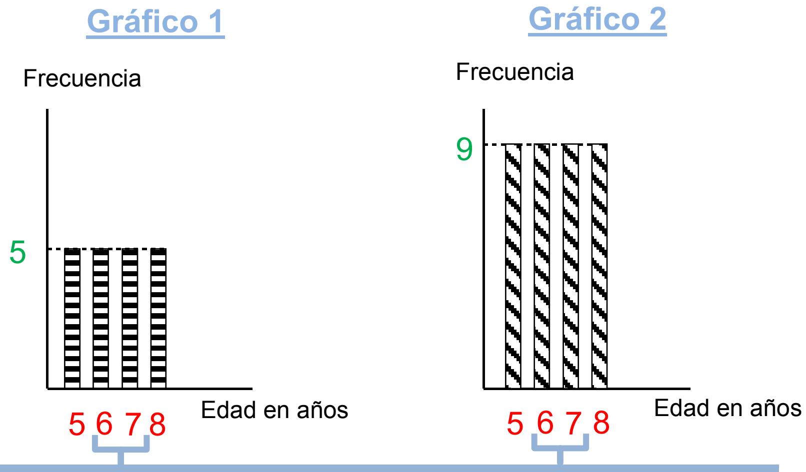
Gráfico 1	Gráfico 2
$\sigma^2 = \frac{5\cdot 5^2 + 5\cdot 6^2 + 5\cdot 7^2 + 5\cdot 8^2}{20} - 6{,}5^2$ $= \frac{5\cdot 25 + 5\cdot 36 + 5\cdot 49 + 5\cdot 64}{20} - 42{,}25$ $= \frac{125 + 180 + 245 + 320}{20} - 42{,}25$ $= \frac{870}{20} - 42{,}25$ $= 43{,}5 - 42{,}25$ $= 1{,}25$	$\sigma^2 = \frac{9\cdot 5^2 + 9\cdot 6^2 + 9\cdot 7^2 + 9\cdot 8^2}{36} - 6{,}5^2$ $= \frac{9\cdot 25 + 9\cdot 36 + 9\cdot 49 + 9\cdot 64}{36} - 42{,}25$ $= \frac{225 + 324 + 441 + 576}{36} - 42{,}25$ $= \frac{1.566}{36} - 42{,}25$ $= 43{,}5 - 42{,}25$ $= 1{,}25$

Luego, se concluye que la afirmación que hace Roxana es **verdadera**.

Por último, para determinar si lo que dice Alejandro es verdad, se debe recordar que:

> La **mediana** de un conjunto de datos ordenados de menor a mayor, corresponde al valor en el cual aproximadamente el *50%* de los datos se encuentra por debajo de él y deja sobre él a aproximadamente al *50%* de los datos.

Del gráfico 1 y del gráfico 2 se obtiene lo siguiente:



Debido a que las edades en cada gráfico son las mismas y en cada gráfico las frecuencias de las edades son las mismas, entonces la mediana corresponde al promedio entre 6 y 7 en ambos gráficos.

De lo anterior, se deduce que la afirmación que realiza Alejandro es **verdadera**.

Como los tres alumnos dijeron una conclusión verdadera, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

Contenido: Análisis de las características de dos o más muestras de datos, haciendo uso de indicadores de tendencia central y dispersión.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: E

PREGUNTA 66

Si las edades, en años, de una población de 6 niños son 3, 5, 6, 7, 8 y 13, entonces su desviación estándar, en años, es

A) 10

B) $\frac{14}{6}$

C) $\sqrt{\frac{14}{6}}$

D) $\sqrt{\frac{58}{6}}$

E) $\frac{58}{6}$

COMENTARIO

Para resolver el ítem se debe determinar la desviación estándar de las edades de una población de 6 niños y para esto recuerde que:

Para calcular la **Desviación Estándar** de los datos de una población se puede aplicar la fórmula $\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}$, donde σ es la desviación estándar de los x_i datos (con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$) y $\overline{x}$ es el promedio de los x_i datos.

Por lo tanto, se calculará primero el promedio:

Recuerde que:

El **Promedio** de un conjunto de datos es igual a la suma de todos los datos dividido por el total de datos.

$$\overline{x} = \frac{3+5+6+7+8+13}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

Así, el promedio de las edades de los niños es 7 años.

Ahora, la desviación estándar se calcula como se muestra a continuación:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(3-7)^2+(5-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(13-7)^2}{6}}$$

Se restan los números del paréntesis.

$$= \sqrt{\frac{(-4)^2+(-2)^2+(-1)^2+(1)^2+(6)^2}{6}}$$

Se elevan al cuadrado las restas.

$$= \sqrt{\frac{16+4+1+1+36}{6}}$$

Se suman los números del numerador.

$$= \sqrt{\frac{58}{6}}$$

Finalmente, el valor de la desviación estándar de la edad de los 6 niños se encuentra en D), siendo esta la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

Contenido: Desviación estándar de un conjunto de datos.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 67

Si una variable aleatoria X tiene distribución normal con media μ igual a 1 y desviación estándar σ igual a 2, ¿cuál de las siguientes variables aleatorias tiene distribución normal de media 0 y varianza 1?

A) $Y = \frac{X-1}{\sqrt{2}}$

B) $W = \frac{X-1}{2}$

C) $V = \frac{X-1}{4}$

D) $K = \frac{X}{4}$

E) $L = \frac{X}{2}$

COMENTARIO

Para contestar esta pregunta se debe cambiar de escala la variable aleatoria X que distribuye N(1, 4) a otra variable aleatoria que distribuye N(0, 1), para esto recuerde que:

> Si H es una variable aleatoria tal que $H \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $Z = \frac{H - \mu}{\sigma}$ es una variable aleatoria tal que $Z \sim N(0, 1)$.

En este caso, se tiene que $\mu = 1$ y $\sigma = 2$, por lo tanto, la variable aleatoria que tiene distribución normal de media 0 y varianza 1 es $\frac{X - 1}{2}$, la cual se encuentra en la opción B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Evaluar críticamente información estadística extraída desde medios de comunicación, tales como periódicos, artículos de revistas o desde Internet.

Contenido: Distribución normal.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: B

PREGUNTA 68

Los datos de una población se modelan mediante una distribución normal, con media μ y varianza 4. Se toma una muestra de esta población de tamaño 49, cuyo promedio es 57,5. Si de esta muestra se obtiene un intervalo de confianza para μ igual a $[56{,}94;\ 58{,}06]$, ¿cuál de los siguientes valores es el coeficiente asociado al nivel de confianza de este intervalo?

A) 13,72
B) 0,98
C) 1,96
D) 0,56
E) 0,28

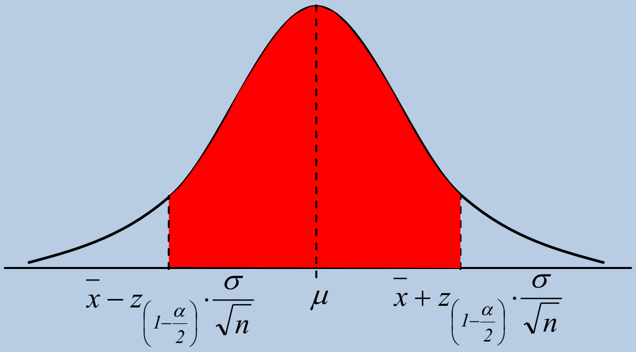
COMENTARIO

Para determinar el coeficiente asociado al nivel de confianza para el intervalo $[56{,}94;\ 58{,}06]$, se debe recordar que:

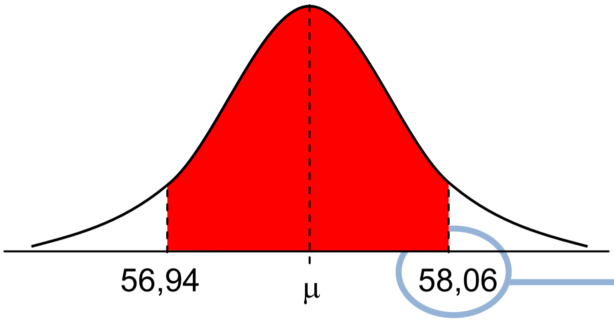
Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una muestra aleatoria simple de X, donde $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$, con σ^2 conocido, entonces un intervalo de confianza para μ con un nivel de confianza del $(1-\alpha)100\%$ es

$$\left[\bar{x} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{x} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

donde $\bar{x}$ es el promedio de la muestra y $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ es el coeficiente asociado al nivel de confianza del este intervalo.



Del enunciado se tiene que σ = $\sqrt{4}$ = 2, n = 49, $\bar{x}$ = 57,5 y el intervalo de confianza para la media μ es $[56{,}94;\ 58{,}06]$, tal como se muestra en la siguiente figura:



Se puede tomar un extremo del intervalo y despejar $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$, en este caso el extremo superior del intervalo.

$$58{,}06 = 57{,}5 + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{2}{\sqrt{49}}$$

Se suma el opuesto de 57,5 en ambos lados de la igualdad, es decir, –57,5.

$$58{,}06 - 57{,}5 = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{2}{7}$$

$$0{,}56 = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{2}{7}$$

Se multiplica por el recíproco de $\frac{2}{7}$, es decir, por $\frac{7}{2}$ en ambos lados de la igualdad.

$$0{,}56 \cdot \frac{7}{2} = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$1{,}96 = z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Por lo tanto, la opción correcta es C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Argumentar acerca de la confiabilidad de la estimación de la media de una población con distribución normal, a partir de datos muestrales.

Contenido: Estimación de intervalos de confianza, para la media de una población con distribución normal y varianza conocida, a partir de una muestra y un nivel de confianza dado.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 69

Se puede determinar que la desviación estándar de los datos de un conjunto A es mayor que la desviación estándar de los datos de un conjunto B, si se sabe que:

(1) El rango de A es mayor que el rango de B.

(2) La media de los cuadrados de los datos de A es mayor que la media de los cuadrados de los datos de B.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

COMENTARIO

Para dar respuesta al ítem se debe analizar si con las condiciones dadas en el enunciado, junto a las dadas en (1) y/o en (2) se puede determinar que la desviación estándar del conjunto A es mayor que la desviación estándar del conjunto B.

Recuerde que:

El **rango** de un **conjunto de datos** corresponde a la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.

Con la información dada en (1) solo se sabe que la diferencia entre el dato mayor y el dato menor del conjunto A es mayor que la diferencia entre el dato mayor y el menor del conjunto B, pero no se tiene información de los datos de estos conjuntos, por lo que no se puede determinar cuál de ellos tiene la mayor desviación estándar.

Ahora, con la información dada en (2) tampoco se puede determinar que la desviación estándar de los datos de A es mayor que la desviación estándar de los datos de B, pues solo se entrega información de la relación existente entre la media de los cuadrados de los datos de ambos conjuntos y no de los datos en sí, para así determinar la relación existente entre las desviaciones estándar entre los conjuntos.

Por último, al considerar las informaciones dadas en (1) y en (2), no se puede concluir nada de la dispersión de los datos de los conjuntos A y B y por lo tanto, no se puede determinar que la desviación estándar de los datos de A es mayor que la desviación estándar de los datos de B.

A continuación, se presenta un ejemplo de dos conjuntos que satisfacen las condiciones dadas en (1) y en (2), pero no se verifica la relación solicitada en el enunciado.

Recuerde que:

La **desviación estándar** σ de un conjunto de n datos se puede calcular como $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \; x_i^2}{n} - (\overline{x})^2}$, donde $\sum f_i x_i^2$ es la suma del cuadrado de cada uno de los x_i por su frecuencia f_i, $\frac{\sum f_i \; x_i^2}{n}$ es la media de los cuadrados de los datos y $\overline{x}$ es el promedio del conjunto de datos.

El **promedio** de un conjunto de datos es la suma de todos los datos divididos por la cantidad total de datos.

	A: –1 –1 –1 2 2 2 2 2 10	B: 0 0 0 0 0 0 0 10
Rango	Rango A = 1 – (–10) = 1 + 10 = 11	Rango B = 10 – 0 = 10
	Rango A > Rango B	
Media de los cuadrados de los datos	$\overline{x_{A^2}} = \frac{3\cdot(-1)^2 + 5\cdot 2^2 + 10^2}{9} = \frac{123}{9}$	$\overline{x_{B^2}} = \frac{7\cdot 0^2 + 10^2}{8} = \frac{100}{8}$
	$\overline{x_{A^2}} > \overline{x_{B^2}}$	
Promedio	$\overline{x_A} = \frac{-1 + -1 + -1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 10}{9}$ $\overline{x_A} = \frac{17}{9}$	$\overline{x_B} = \frac{0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 10}{8}$ $\overline{x_B} = \frac{10}{8}$
Desviación estándar	$\sigma_A = \sqrt{\frac{3\cdot(-1)^2 + 5\cdot 2^2 + 10^2}{9} - \left(\frac{17}{9}\right)^2}$ $\sigma_A = \sqrt{\frac{123}{9} - \frac{289}{81}}$ $\sigma_A = \sqrt{\frac{818}{81}}$	$\sigma_B = \sqrt{\frac{7\cdot 0^2 + 10^2}{8} - \left(\frac{10}{8}\right)^2}$ $\sigma_B = \sqrt{\frac{100}{8} - \frac{100}{64}}$ $\sigma_B = \sqrt{\frac{175}{16}}$
	$\sigma_A < \sigma_B$	

Como con la información dada en (1) y/o en (2) no se puede determinar lo solicitado, la opción correcta es E).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Datos

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de dispersión y comparar características de dos o más conjuntos de datos, utilizando indicadores de tendencia central, de posición y de dispersión.

Contenido: Desviación estándar de un conjunto de datos.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: E

PREGUNTA 70

En un curso de 50 estudiantes se sorteará al azar un MP3 entre los asistentes a clases. Si por cada 3 mujeres de este curso hay 7 hombres y el día del sorteo del total de los estudiantes faltan solo 2 mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que el premio lo gane una mujer?

A) $\frac{13}{48}$

B) $\frac{1}{48}$

C) $\frac{1}{50}$

D) $\frac{13}{50}$

E) $\frac{15}{50}$

COMENTARIO

Como en la pregunta se pide la probabilidad de que el premio lo gane una mujer de un grupo de 50 estudiantes se calculará la cantidad de mujeres que hay en el curso. Se designará por M la cantidad de mujeres y por H a la cantidad de hombres.

Del enunciado se tiene que por cada 3 mujeres hay 7 hombres, es decir,

$$\frac{M}{H} = \frac{3}{7} \xrightarrow{\text{Despejando H en la igualdad se obtiene}} H = \frac{7M}{3}$$

Como en el curso hay 50 personas, entre hombres y mujeres, se tiene que M + H = 50.

Al reemplazar H en la igualdad $\xrightarrow{\text{se tiene que}} \frac{7M}{3} + M = 50 \xrightarrow{\text{sumando}} \frac{10M}{3} = 50$

Al despejar M de esta igualdad se llega a:

$$\frac{10M}{3} = 50$$

Multiplicando por el recíproco de $\frac{10}{3}$ a ambos lados de la igualdad, es decir, por $\frac{3}{10}$.

$$M = \frac{150}{10}$$

Simplificando la fracción.

$$M = 15$$

Recuerde que:

La **probabilidad de ocurrencia** de un suceso en el modelo de Laplace, está dada por:

$$\frac{\textit{Casos favorables}}{\textit{Casos totales}}.$$

Como el día del sorteo faltan 2 mujeres, se tiene que habrá 48 estudiantes, de los cuales 13 serán mujeres, luego la probabilidad de que el MP3 lo gane una mujer es $\frac{13}{48}$. Por lo anterior, A) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Seleccionar la forma de obtener la probabilidad de un evento, ya sea en forma teórica o experimentalmente, dependiendo de las características del experimento aleatorio.

Contenido: Resolución de problemas en contextos de incerteza, aplicando el cálculo de probabilidades mediante el modelo de Laplace**.**

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 71

Un programa computacional genera números de tres dígitos distintos entre sí y ningún dígito puede ser cero. ¿Cuántos de estos números están formados con exactamente dos números primos?

A) $3\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}$

B) $3\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}$

C) $6\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}$

D) $6\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}$

E) $3\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{1}$

COMENTARIO

Para dar solución al problema se debe determinar cuántos números de tres dígitos entre sí puede generar un programa computacional bajo las condiciones dadas en el enunciado.

Así, se tiene que ningún dígito puede ser cero, por lo que los dígitos a considerar son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, de los cuales:

Son números primos	Son números no primos
2 3 5 7	1 4 6 8 9

Para determinar el número de todas las posibles combinaciones de dos 2 dígitos primos entre 4 dígitos primos y el número de todas las posibles combinaciones de 1 dígito no primo de entre 5 dígitos no primo, se debe recordar que:

El total de **combinaciones** distintas que se pueden formar con n elementos de un total de m elementos, sin orden y sin reposición, es $\binom{m}{n}$.

De lo anterior, se tiene que:

El número de todas las posibles combinaciones de 2 dígitos primos entre 4 dígitos primos, está dado por:	El número de todas las posibles combinaciones de 1 dígito no primo de entre 5 dígitos no primos, está dado por:
$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{1}$

Recuerde que:

El total de ordenaciones diferentes que se pueden realizar con n elementos distintos es $n!$, donde $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1$.

Ahora, se debe determinar la cantidad de ordenamientos que se pueden hacer con tres dígitos distintos, esto corresponde a $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Finalmente, la cantidad de números que están formados por tres dígitos distintos entre sí, donde dos de ellos son primos es la expresión $6\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}$, por lo que la opción correcta es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Primero Medio

Objetivo Fundamental: Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarlo al cálculo de probabilidades en diversas situaciones.

Contenido: Técnicas combinatorias.

Habilidad Cognitiva: Comprender

Clave: D

PREGUNTA 72

En una caja hay en total siete bolitas, de las cuales tres son blancas y cuatro son negras, todas del mismo tipo. Si se extraen al azar dos bolitas sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea negra y la segunda sea blanca?

A) $\frac{2}{7}$

B) $\frac{1}{12}$

C) $\frac{1}{42}$

D) $\frac{7}{12}$

E) $\frac{12}{49}$

COMENTARIO

Para resolver este ítem recuerde que:

La **probabilidad** de ocurrencia de un suceso en el modelo de Laplace está dada por: $\dfrac{Casos\ \ favorables}{Casos\ totales}$.

Como en la caja hay en total 7 bolitas de las cuales 3 son blancas y 4 son negras, se tiene que al extraer la primera bolita de la caja, la probabilidad de que esta sea negra es $\frac{4}{7}$.

Ahora, como las extracciones son sin reposición en la caja quedan 6, luego al extraer la segunda bolita de la caja, la probabilidad de que esta sea blanca es $\frac{3}{6}$.

Recuerde que:

La probabilidad de que ocurran simultáneamente dos sucesos dependientes es igual a la probabilidad de que ocurra uno de ellos por la probabilidad de que ocurra el otro, dado que ocurrió el primero.

Por lo tanto, al extraer dos bolitas sin reposición, la probabilidad de que la primera sea negra y la segunda sea blanca es $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$, valor que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar
Área Temática: Azar
Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Aplicar propiedades de la suma y producto de probabilidades, en diversos contextos, a partir de la resolución de problemas que involucren el cálculo de probabilidades.

Contenido: Resolución de problemas de cálculo de probabilidades aplicando la propiedad del producto de probabilidades.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 73

Sea $f(x) = k^2x^2$, con k una constante, la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X que tiene como recorrido el conjunto $\{1, 2, 4, 10\}$. Si g es la función de distribución de probabilidad acumulada de X, entonces g(2) es

A) $\dfrac{4}{121}$

B) $\dfrac{5}{121}$

C) $\dfrac{2}{11}$

D) $\dfrac{\sqrt{5}}{11}$

E) indeterminable.

COMENTARIO

Para resolver la pregunta recuerde que:

Para una variable aleatoria discreta *X* cuyo recorrido es $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, se tiene que $f(x_i) = P(X = x_i)$ y $P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \ldots + P(X = x_i) = 1.$

Como $f(x) = k^2x^2$ es una función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X que tiene como recorrido el conjunto $\{1, 2, 4, 10\}$, se cumple que f(1) + f(2) + f(4) + f(10) = 1.

Luego,

$k^2\cdot(1)^2 + k^2\cdot(2)^2 + k^2\cdot(4)^2 + k^2\cdot(10)^2 = 1$

Se calculan las potencias.

$$k^2 \cdot 1 + k^2 \cdot 4 + k^2 \cdot 16 + k^2 \cdot 100 = 1$$

Se factoriza por k^2.

$$k^2 \cdot (1 + 4 + 16 + 100) = 1$$

Se despeja k^2.

$$k^2 = \frac{1}{121}$$

Así, la función de probabilidad es $f(x) = \frac{1}{121}x^2$.

Recuerde que:

Una **función de probabilidad acumulada** de X está dada por $F(t) = P(X \leq t)$, con $t \in IR$.

En particular, si X es una variable aleatoria discreta con recorrido $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, entonces $F(x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \ldots + P(X = x_i)$.

Ahora, como g es la función de distribución de probabilidad acumulada de X se tiene que

$$g(2) \xrightarrow[\text{Es igual a}]{} f(1) + f(2) \xrightarrow[\text{Valorando en la función por 1 y 2.}]{} \frac{1}{121} \cdot 1 + \frac{1}{121} \cdot 4 \xrightarrow[\text{Realizando las multiplicaciones y la adición.}]{} \frac{5}{121}$$

De lo anterior, la opción correcta es B).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y establecimiento de la relación con la función de distribución.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 74

En el experimento de lanzar un dado, se define la variable aleatoria X como el número obtenido en el lanzamiento del dado. La tabla adjunta muestra la función de probabilidad f de X. Según esta información, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El valor esperado de X es 3,8.

II) La probabilidad de obtener un número par es 0,5.

III) La probabilidad de obtener un número menor o igual que 2 es igual a la probabilidad de obtener un 6.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y III

x	f(x)
1	0,10
2	0,15
3	0,20
4	0,20
5	0,10
6	0,25

COMENTARIO

En este ítem se debe determinar la veracidad de cada una de las afirmaciones presentadas en I), en II) y en III).

Recuerde que:

- Para una variable aleatoria X cuyo recorrido es $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ se tiene que $f(x_i) = P(X = x_i)$.
- El **valor esperado** de una variable aleatoria discreta X, está dado por:

  $E(X) = x_1 \cdot f(x_1) + x_2 \cdot f(x_2) + x_3 \cdot f(x_3) + ... + x_n \cdot f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i)$, donde x_i son los elementos pertenecientes al recorrido de X, con $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $f(x_i)$ es su probabilidad.

Utilizando lo anterior, el valor esperado de la variable X está dado por:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1\cdot P(X = 1) & + & 2\cdot P(X = 2) & + & 3\cdot P(X = 3) & + & 4\cdot P(X = 4) & + & 5\cdot P(X = 5) & + & 6\cdot P(X = 6) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\underbrace{1\cdot(0{,}10) \; + \; 2\cdot(0{,}15) \; + \; 3\cdot(0{,}20) \; + \; 4\cdot(0{,}20) \; + \; 5\cdot(0{,}10) \; + \; 6\cdot(0{,}25)}_{\boxed{\text{Probabilidades obtenidas de la tabla}}}$$

$$0{,}10 + 0{,}30 + 0{,}60 + 0{,}80 + 0{,}50 + 1{,}50 = 3{,}8$$

Por lo anterior, I) es **verdadera**.

Ahora, para ver si la probabilidad de obtener un número par es 0,5 se procede de la siguiente manera:

$$P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = 0{,}15 + 0{,}20 + 0{,}25 = 0{,}60$$

por lo que, la afirmación en II) es **falsa.**

En III), la probabilidad de obtener un número menor o igual que 2 es

$$P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}10 + 0{,}15 = 0{,}25$$

Y la probabilidad de obtener el 6 es $P(X = 6) = 0{,}25$, por lo que la afirmación en III) es **verdadera**.

De lo anterior, D) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Valor esperado de una variable aleatoria discreta.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: D

PREGUNTA 75

Un colegio ofrece a sus alumnos varias actividades culturales, entre ellas teatro y danza. El 10% de los estudiantes del colegio participa en danza, el 8% participa en teatro y el 4% de los estudiantes del colegio participa en danza y teatro. Si se escoge al azar un estudiante del colegio, ¿cuál es la probabilidad de que este participe en teatro si se sabe que participa en danza?

A) $\frac{2}{9}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{2}$

COMENTARIO

Para resolver este ítem se puede utilizar probabilidad condicional.

Recuerde que:

La **probabilidad de ocurrencia de un evento *A* dado la ocurrencia de un evento *B***, se escribe como *P(A/B)* y se calcula como $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, donde *P(B)* es la probabilidad de que ocurra *B* y $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que ocurra *A* y *B*.

En la siguiente tabla se muestra la distribución de los estudiantes en las actividades culturales de un colegio, de acuerdo a la información entregada en el enunciado:

	Distribución de los estudiantes por actividad cultural		
	Estudiantes que participan en Danza	Estudiantes que **NO** participan en Danza	**Total**
Estudiantes que participan en Teatro	$\frac{4}{100}$		$\frac{8}{100}$
Estudiantes que **NO** participan en Teatro.			
Total	$\frac{10}{100}$		

Parte de los estudiantes que participan en Teatro y Danza.

Parte de los estudiantes que participan en Danza.

Se designará por D a la cantidad de estudiantes que participan en danza y por T a la cantidad de estudiantes que participan en teatro.

Al elegir al azar a un estudiante del colegio, la probabilidad de que este participe en teatro si se sabe que participa en danza, es decir, P(T/D), se puede determinar de la siguiente manera:

De la tabla se tiene que $P(T \cap D)$ es $\frac{4}{100}$ y $P(D)$ es $\frac{10}{100}$.

Por lo que, $P(T/D) = \frac{P(T \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{10}{100}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Simplificando la fracción.

Por lo que, B) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de probabilidad condicional y aplicarlo en diversas situaciones que involucren el cálculo de probabilidades.

Contenido: Resolución de problemas, en diversos contextos, que implican el cálculo de probabilidades condicionales.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: B

PREGUNTA 76

En el experimento de lanzar dos dados comunes 150 veces, se define la variable aleatoria X como el número de veces en los cuales la suma de los dos dados es mayor que 10. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa a P(X > 1)?

A) $1 - \left(\left(\frac{11}{12}\right)^{150} + 150 \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{149}\right)$

B) $150 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{150}$

C) $1 - \left(\frac{11}{12}\right)^{150}$

D) $1-\left(\frac{2}{11}\right)^{150}$

E) $1-\left(\left(\frac{11}{12}\right)^{150}+\left(\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^{149}\right)$

COMENTARIO

Una forma de determinar P(X > 1) es modelar la variable aleatoria X mediante una distribución binomial de parámetros N y p.

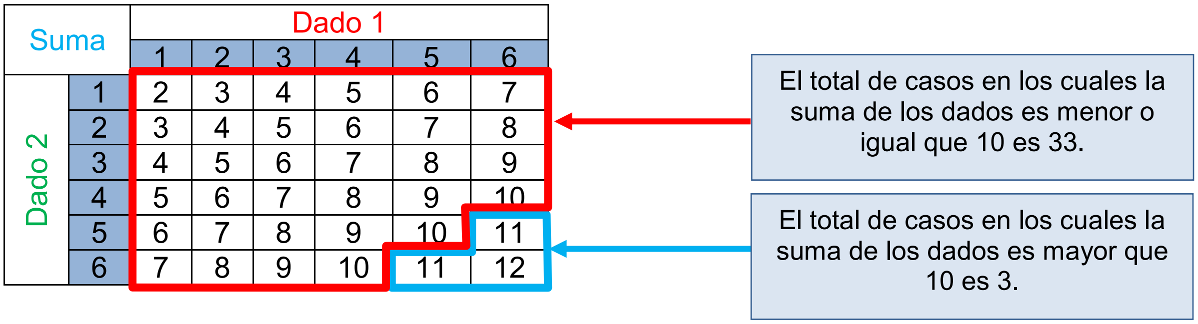
Recuerde que:

En un **modelo binomial** al efectuar N veces un experimento aleatorio con resultados dicotómicos (éxito o fracaso), se tiene que, si la probabilidad de tener éxito en el experimento es p y la probabilidad de tener fracaso, en el mismo experimento, es $q = 1-p$, entonces la probabilidad de obtener exactamente k éxitos, al efectuar de forma independiente N veces dicho experimento, está dado por la expresión

$$\binom{N}{k}p^k\cdot q^{N-k}.$$

Aplicando lo anterior al problema se tiene que el éxito en el experimento está dado por que la suma de los dos dados sea mayor que 10 y fracaso en el caso contrario.

En la siguiente tabla, se muestran los posibles resultados para la suma de los dos dados:



Suma		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

El total de casos en los cuales la suma de los dados es menor o igual que 10 es 33.

El total de casos en los cuales la suma de los dados es mayor que 10 es 3.

Al calcular la probabilidad de que la $\underbrace{\textbf{suma de los dados sea mayor que 10}}_{\text{Éxito}}$ se tiene $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

y la probabilidad de que la $\underbrace{\textbf{suma NO sea mayor que 10}}_{\text{Fracaso}}$ es $\frac{33}{36} = \frac{11}{12}$.

Ahora, en el enunciado se define la variable aleatoria X como el número de veces en que la suma de los dados es mayor que 10, y como el experimento se repite 150 veces, se tiene que la variable aleatoria X puede tomar valores que van desde el 0 hasta el 150.

Como el cálculo de P(X > 1), que es la probabilidad de que X tome valores desde el 2 hasta el 150 es casi impracticable de realizar, se aplicará lo siguiente:

> **Recuerde que**:
>
> Si A es un suceso de un experimento aleatorio y A^c es su **complemento**, entonces $P(A) = 1 - P(A^c)$.

Luego, $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - ((P(X = 0) + P(X = 1))$.

Ahora, al reemplazar en la fórmula para la distribución binomial la probabilidad de tener éxito $\left(\frac{1}{12}\right)$, la de tener fracaso $\left(\frac{11}{12}\right)$ y la cantidad de repeticiones del experimento (150), se tiene:

$$P(X = 0) \longrightarrow \binom{150}{0}\left(\frac{1}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{150-0} \longrightarrow 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{150} \longrightarrow \left(\frac{11}{12}\right)^{150}$$

Recuerde que:

$P^0 = 1$, con $P \neq 0$ y $\binom{M}{0} = 1$

$$P(X = 1) \rightarrow \binom{150}{1}\left(\frac{1}{12}\right)^{1}\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^{150\,-\,1} \rightarrow 150\cdot\left(\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^{149}$$

Recuerde que:

$P^{1} = P$, con $P \neq 0$ y $\binom{M}{1} = M$

Por lo que,

$$P(X > 1) = 1 - \left(\left(\frac{11}{12}\right)^{150} + 150\cdot\left(\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{11}{12}\right)^{149}\right)$$

Así, A) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Aplicar el concepto de modelo probabilístico para describir resultados de experimentos binomiales.

Contenido: Uso del modelo binomial para analizar situaciones o experimentos, cuyos resultados son dicotómicos.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: A

PREGUNTA 77

El gráfico de la figura adjunta representa la función de distribución acumulada de una variable aleatoria discreta X. Si el recorrido de X es $\{a, b, c\}$ y P(X = b) = 0,2, ¿cuál es el valor de P(X = a)?

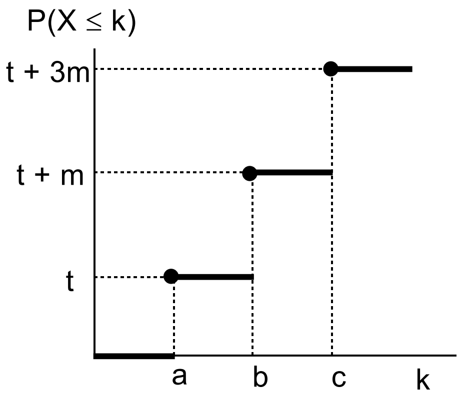
A) $\frac{4}{10}$

B) $\frac{3}{10}$

C) $\frac{2}{10}$

D) $\frac{2}{30}$

E) Indeterminable con los datos dados.



COMENTARIO

Una forma de resolver este ítem es interpretar el gráfico y llevar los datos que se obtienen a una tabla que contenga la probabilidad de cada elemento del recorrido de la variable aleatoria X, así como su respectiva probabilidad acumulada, para lo que se necesita recordar que:

Una **función de distribución acumulada** de X está dada por $F(t) = P(X \leq t)$, con $t \in IR$. En particular, si X es una variable aleatoria discreta con recorrido $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, entonces $F(x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + ... + P(X = x_i)$.

La tabla que resume los datos del gráfico es la siguiente:

k	**P(X = k)**	**P(X ≤ k)**
a	t	t
b	m	t + m
c	2m	t + 3m

Del enunciado se tiene que P(X = b) = 0,2 y de la tabla se tiene que P(X = b) = m, luego m = 0,2.

Por otro lado, para calcular la función de distribución de probabilidad acumulada recuerde que:

Si X es una variable aleatoria discreta con recorrido $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, donde $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_i$, entonces $P(X \leq x_n) = 1$.

De lo anterior, se cumple que P(X ≤ c) = 1.

Así, de la tabla se tiene que

$$P(X \leq c) = t + 3m = 1$$

Reemplazando m por 0,2.

$$t + 3\cdot(0{,}2) = 1$$

Despejando t.

$$t = 0{,}4$$

luego, m = 0,2 y t = 0,4

Por lo tanto, $P(X = a) = 0{,}4 = \frac{4}{10}$, valor que se encuentra en la opción A).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Tercero Medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad, en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y establecimiento de su relación con la función de distribución acumulada.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: A

PREGUNTA 78

Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim B(40;\ 0{,}5)$. Si la distribución de X es aproximada por una distribución normal con media μ y desviación estándar σ, ¿cuáles de los siguientes valores corresponden a los valores de μ y σ, respectivamente?

A) 20,5 y $\sqrt{10}$

B) 20 y 10

C) 20 y 0,5

D) 20,5 y 0,5

E) 20 y $\sqrt{10}$

COMENTARIO

En este ítem se debe determinar qué valores corresponden a μ y σ.

Recuerde que:

Si una variable aleatoria X **distribuye binomial** con parámetros n y p, es decir $X \sim B(n, p)$, se tiene que al aproximar X por una distribución normal de parámetros μ y σ, donde μ es la media y σ desviación estándar, éstas variables se relacionan de la siguiente manera:

$$\mu = np \quad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{np(1 - p)}\,.$$

De la información del enunciado se tiene que n = 40 y p = 0,5

por lo que, $\mu = 40\cdot(0,5) = 20$ y $\sigma = \sqrt{40\,(0,5)\,(0,5)} = \sqrt{10}$

De lo anterior, E) es la opción correcta.

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Utilizar modelos probabilísticos para representar y estudiar diversas situaciones y fenómenos en condiciones de incerteza.

Contenido: Aproximación de una distribución binomial por una distribución normal.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: E

PREGUNTA 79

Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} 2kx, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 6k, & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si k es un número real positivo, entonces k es

A) $\frac{1}{24}$

B) $\frac{1}{12}$

C) $\frac{1}{21}$

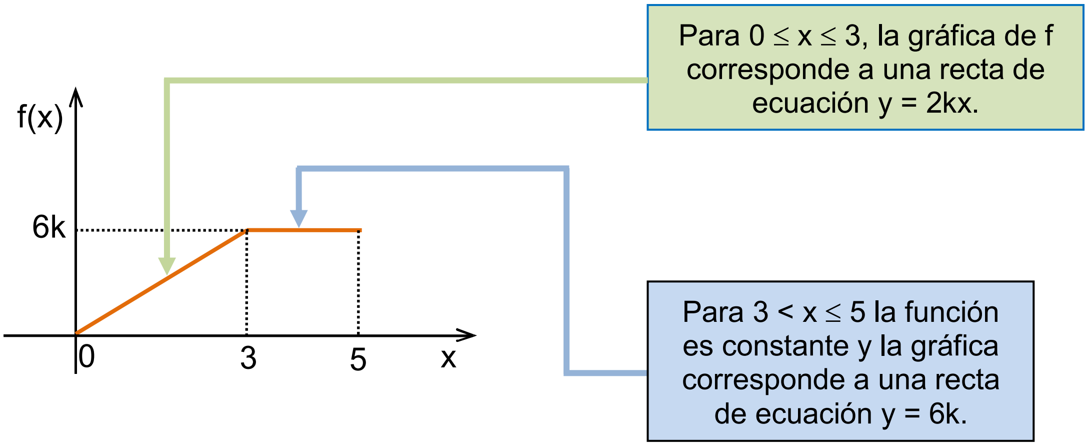
D) $\frac{1}{30}$

E) ninguno de los valores anteriores.

COMENTARIO

Para determinar el valor de k en la función de densidad de probabilidad de X se puede graficar la función según los datos dados en el enunciado.

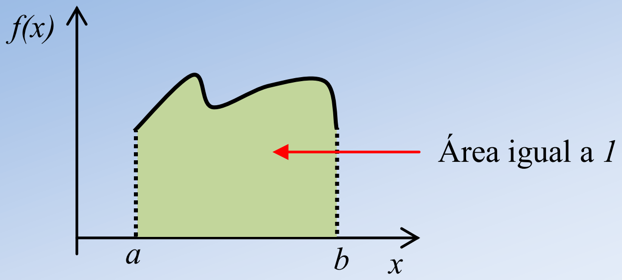
A continuación, se muestra el gráfico de f:



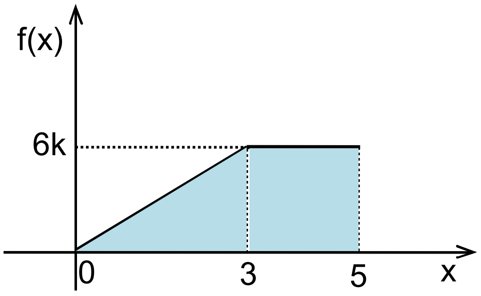
Para $0 \leq x \leq 3$, la gráfica de f corresponde a una recta de ecuación y = 2kx.

Para $3 < x \leq 5$ la función es constante y la gráfica corresponde a una recta de ecuación y = 6k.

Recuerde que: Si se grafica la **función densidad** *f* de una variable aleatoria continua *X*, cuyo dominio es $a \leq x \leq b$, se tiene que el área bajo la curva es *1*, tal como se indica en la figura.



El siguiente gráfico muestra el área bajo la curva de f:



Luego, el área bajo a curva corresponde a la suma del área entre un triángulo cuya base mide 3 unidades y cuya altura mide 6k unidades y el área de un rectángulo de lados 2 unidades y 6k unidades. Como esta suma es igual a 1 se obtiene:

$$\frac{3 \cdot 6k}{2} + 2 \cdot 6k = 1$$

Multiplicando y simplificando.

$$9k + 12k = 1$$

Sumando los términos semejantes.

$$21k = 1$$

Multiplicando por el recíproco de 21 a ambos lados de la igualdad, es decir, por $\frac{1}{21}$.

$$k = \frac{1}{21}$$

Este valor se encuentra en la opción C).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Cuarto Medio

Objetivo Fundamental: Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, para el caso de una variable aleatoria continua.

Contenido: Función de densidad de una variable aleatoria continua.

Habilidad Cognitiva: Aplicar

Clave: C

PREGUNTA 80

En el experimento de lanzar n dados comunes se define una variable aleatoria como la suma de los números obtenidos. Se puede determinar n, si:

(1) Se conoce el recorrido de la variable aleatoria.

(2) Se sabe que la probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor 30 es cero y la probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor 24 no es cero.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas (1) y (2)
D) Cada una por sí sola (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

COMENTARIO

Para resolver este ítem es necesario determinar si con la información presentada en (1) y/o (2) se puede conocer el número n de dados que son lanzados en el experimento.

Recuerde que:

El **recorrido** de una **variable aleatoria** corresponde a todos aquellos valores que puede tomar dicha variable aleatoria.

En el enunciado se define la variable aleatoria como **la suma de los números obtenidos** al lanzar n dados comunes, por lo tanto, si se designa por X a esta variable aleatoria, se obtiene que:

- Al lanzar **un** dado común el recorrido de X es:
  $\{\mathbf{1}, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Al lanzar **dos** dados comunes el recorrido de X es:
  $\{\mathbf{2}, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

- Al lanzar **tres** dados comunes el recorrido de X es:
  $\{\mathbf{3}, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

- Al lanzar **n** dados comunes el recorrido de X es:
  $\{\mathbf{n}, n + 1, n + 2, n + 3, \ldots , 6n\}$

De esta manera, se puede observar una regularidad en los resultados antes descritos, donde la cantidad de dados lanzados corresponde al elemento menor del recorrido de X.

Así, con la información en (1) se puede determinar el número n de dados comunes que son lanzados, al conocer el recorrido de la variable aleatoria.

Por otra parte, de la afirmación (2) se tiene que $P(X = 30) = 0$ y $P(X = 24) \neq 0$.

Para analizar esta información se puede realizar lo siguiente:

- Si se lanza un dado común, el mayor valor para X es 6.

- Si se lanzan dos dados comunes, el mayor valor para X es 6 + 6 = 12.

- Si se lanzan tres dados comunes, el mayor valor para X es 6 + 6 + 6 = 18
- Si se lanzan cuatro dados comunes, el mayor valor para X es 6 + 6 + 6 + 6 = 24.
- Si se lanzan cinco dados comunes, el mayor valor para X es 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30.

Como se sabe que P(X = 30) = 0, se tiene que no se lanzaron 5 dados comunes, pero como P(X = 24) $\neq$ 0, se tiene que 24 pertenece al recorrido de X, es decir, se lanzaron cuatro dados. Luego, con la información en (2) se puede determinar la cantidad n de dados comunes que se lanzaron.

De lo anterior, la opción correcta es D).

FICHA DE REFERENCIA CURRICULAR

Eje Temático: Datos y Azar

Área Temática: Azar

Nivel: Segundo Medio

Objetivo Fundamental: Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.

Contenido: Variable aleatoria.

Habilidad Cognitiva: Analizar, Sintetizar y Evaluar

Clave: D

Universidad de Chile