PROCESO DE ADMISIÓN 2011 | EL MERCURIO

23 DE SEPTIEMBRE DE 2010

DOCUMENTO OFICIAL

PSU

Universidad de Chile
VICERRECTORÍA DE ASUNTOS ACADÉMICOS
DEMRE

CONSEJO DE RECTORES
UNIVERSIDADES CHILENAS

RESOLUCIÓN PRUEBA MATEMÁTICA • Parte III

DE LOS CUATRO EJES TEMÁTICOS EVALUADOS EN LA PSU DE MATEMÁTICA, GEOMETRÍA ES EL QUE PRESENTA EL MENOR PORCENTAJE MEDIO DE RESPUESTAS CORRECTAS. POR LO MISMO, TE RECOMENDAMOS ESTAR ATENTO A LOS CONTENIDOS DE ESTA PUBLICACIÓN, DONDE PODRÁS ENCONTRAR EL ANÁLISIS DE LAS PREGUNTAS Nº 36 A LA Nº 54, CORRESPONDIENTES AL EJE TEMÁTICO DE GEOMETRÍA.

N°17 SERIE DEMRE - UNIVERSIDAD DE CHILE

RESOLUCIÓN DE LA PRUEBA OFICIAL DE MATEMÁTICA
PARTE III

PRESENTACIÓN

La presente publicación se abocará al análisis de las preguntas Nº 36 a la Nº 54, correspondientes al eje temático de Geometría, publicadas el 24 de junio del presente año.

Cabe señalar que de los cuatro ejes temáticos evaluados en la PSU® Matemática, Geometría es el que presenta, año a año, el menor porcentaje medio de respuestas correctas y el mayor porcentaje medio de respuestas omitidas, en especial en los contenidos de tercero y cuarto año medio.

Por lo que, es importante tanto para profesores como para estudiantes, estudiar todos los contenidos de este eje temático, para mejorar estos porcentajes. Además, para responder las preguntas de Geometría, los postulantes deben, por una parte, haber desarrollado las habilidades cognitivas, desde la más básica que es de Reconocimiento hasta las de orden superior, donde deben tener la capacidad de realizar Análisis, Síntesis y Evaluación y por otra parte, recordar y aplicar los conocimientos previos, que se suponen internalizados durante la Enseñanza Básica. También, deben aplicar en varias preguntas operaciones y propiedades del Álgebra, que se estudian actualmente durante la Enseñanza Media.

Las preguntas de esta publicación apuntan a contenidos de primero a cuarto año medio. En los comentarios de ellas se especifica el contenido que está involucrado y los tópicos previos que son necesarios para su resolución. Además, para cada una se indica el grado de dificultad con que resultó, el porcentaje de omisión que tuvo y se señalan los errores más comunes que probablemente cometieron los alumnos en la resolución de estos ítemes.

COMENTARIOS DE LAS PREGUNTAS REFERIDAS AL EJE TEMÁTICO DE GEOMETRÍA

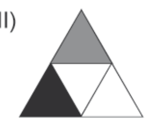
PREGUNTA 36

La figura 5 está formada por 4 triángulos equiláteros congruentes entre sí. ¿Cuál(es) de las figuras en I), en II) y en III) se obtiene(n) por alguna rotación con respecto al centro de la figura 5?

fig. 5


I)


II)

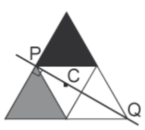

III)


A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

COMENTARIO

Esta pregunta apunta al contenido de rotación de figuras planas, en la cual hay que identificar si las figuras que aparecen en las opciones I), II) y III) se pueden obtener de alguna rotación de la figura 5, según un cierto ángulo y con respecto al centro de ella.

Lo primero a tener en consideración, es que el triángulo de la figura 5 es un triángulo equilátero, dada la congruencia de los 4 triángulos equiláteros que lo forman. Luego su centro de rotación (C) corresponde a la intersección de sus elementos secundarios, como se muestra en la siguiente figura:



Ahora, las figuras que aparece en I) y en II) se pueden obtener al rotar en 120° la figura 5, en sentido horario y en sentido antihorario, respectivamente.

Por otra parte, la figura que aparece en III) se obtiene de una simetría axial de la figura 5 con respecto a la recta PQ y no por una rotación.

El análisis anterior permite establecer que la clave es B), pues sólo las figuras de I) y de II) pueden ser obtenidas de la figura 5 por alguna rotación de ella.

Este ítem resultó de dificultad mediana, siendo contestado correctamente por el 51% de las personas que lo enfrentaron, la omisión fue del 24% y el distractor más marcado fue E), con un 13% de adhesión. En este caso, los postulantes probablemente confundieron la reflexión (simetría) con la rotación.

PREGUNTA 37

En la figura 6, el triángulo ABC es equilátero y $\overline{AD}$ es bisectriz del ángulo CAB. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El ángulo CDA mide 90°.
II) $\overline{AD}$ es eje de simetría del triángulo ABC.
III) Los triángulos ADC y ADB son congruentes.

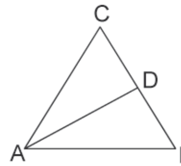


fig. 6

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

COMENTARIO

El contenido al que se refiere el ítem es "Criterios de congruencia de triángulos". Los alumnos deben reconocer el eje de simetría de una figura y recordar de la Enseñanza Básica que en un triángulo equilátero los elementos secundarios trazados desde un vértice coinciden.

Así, como el Δ ABC es equilátero, se tiene que $\overline{AD}$ es bisectriz y altura, por lo tanto el ángulo CDA mide 90°, luego la afirmación I) es verdadera.

Por otro lado, se tiene que las afirmaciones II) y III) son verdaderas, pues los triángulos ADC y ADB son congruentes, por el criterio ángulo-lado-ángulo (ALA), ya que, el segmento AD es lado común a ambos triángulos, $\sphericalangle$ DAB = $\sphericalangle$ DAC = 30°, porque $\overline{AD}$ es bisectriz del $\sphericalangle$ CAB que mide 60°, por ser un ángulo interior de un triángulo equilátero y $\sphericalangle$ ADB = $\sphericalangle$ ADC = 90°, por ser $\overline{AD}$ altura del Δ ABC. Además, la congruencia de estos triángulos implica que $\overline{BD} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ y por lo tanto, $\overline{AD}$ es eje de simetría del Δ ABC.

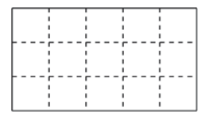
Como las tres afirmaciones son verdaderas, la opción correcta es E), que fue seleccionada por el 68% de los postulantes que la abordaron, resultando un ítem fácil. La omisión alcanzó al 21%.

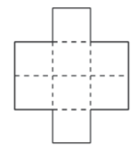
El 13% de los alumnos que contestaron el ítem marcó el distractor D), no consideraron como verdadera la afirmación II), quizás por un desconocimiento del concepto de eje de simetría de una figura.

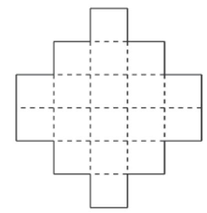
PREGUNTA 38

Un dominó está formado por dos cuadrados congruentes entre sí, como lo muestra la figura 7. Cada una de las figuras presentadas en I), en II) y en III) están formadas por cuadrados congruentes a los que forman el dominó. ¿Cuál(es) de ellas es (son) posible(s) de embaldosar (teselar) completamente con el dominó?

fig. 7


I)


II)


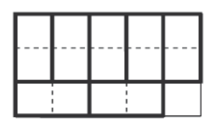
III)


A) Sólo II
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

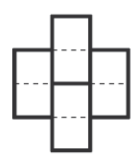
COMENTARIO

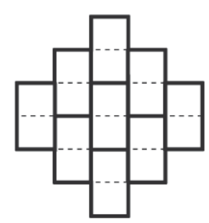
En este caso, la pregunta está relacionada con el contenido que apunta a la posibilidad de embaldosar el plano con algunos polígonos, donde el postulante debe determinar si un grupo de dominós como el que se muestra en la figura 7 puede cubrir completamente las figuras dadas en I), en II) y en III).

Es así como, la figura dada en I) no puede ser embaldosada completamente por estos dominós, ya que como máximo se pueden colocar 7 de éstos, pero siempre sobrará un cuadrado, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:



En cambio, las figuras que aparecen en II) y en III) si pueden ser embaldosadas completamente por el dominó. La que aparece en II) por 4 dominós y la que aparece en III) por 9. Las siguientes figuras muestran estas situaciones.





Por lo tanto, la clave es D) que fue marcada por el 56% de las personas que abordaron esta pregunta, lo que implica que estadísticamente es de dificultad mediana y la omisión fue del 24%.

La mayoría de los alumnos que se equivocaron al contestar el ítem se inclinó por el distractor A) (8%), lo que indica que no fueron capaces de encontrar la forma en que se podían ubicar los dominós en la figura dada en III).

PREGUNTA 39

Si en la figura 8 los triángulos ABC y EAD son congruentes, entonces el perímetro del polígono ABCED es

A) 32 cm
B) 40 cm
C) 42 cm
D) 48 cm
E) 56 cm

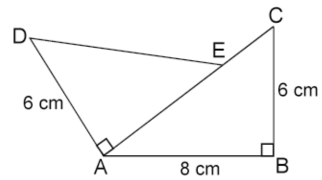


fig. 8

COMENTARIO

Para contestar correctamente el ítem los alumnos deben conocer el concepto de congruencia de triángulos, recordar de la Enseñanza Básica el teorema de Pitágoras y saber que el perímetro de un polígono se calcula sumando las medidas de sus lados.

En primer lugar, se aplica el teorema de Pitágoras en el Δ ABC para encontrar la medida del lado $\overline{AC}$. Así, $AC^2 = 8^2 + 6^2$, de donde se tiene que AC = 10 cm. Además, como los triángulos ABC y EAD son congruentes, se deduce que AE = AB = 8 cm y DE = AC = 10 cm.

Ahora, se tiene que AC = AE + EC, de donde se llega a que EC = AC – AE = 10 – 8 = 2 cm. Luego, el perímetro del polígono ABCED es AB + BC + CE + ED + DA = 8 + 6 + 2 + 10 + 6 = 32 cm, valor que se encuentra en la opción A).

Este ítem resultó de dificultad mediana, ya que el 40% de los alumnos que abordaron la pregunta marcó la opción correcta y la omisión fue alta para este tipo de pregunta, alcanzando al 39%.

En cuanto al distractor más marcado, éste fue D), con una preferencia del 9%, es posible que los alumnos que marcaron esta opción sumaron el perímetro de los dos triángulos congruentes, o sea, 24 + 24 = 48 cm.

PREGUNTA 40

En la figura 9, ABCD es un rectángulo. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Δ AGD $\cong$ Δ BFC
II) El área del Δ EBF es el doble del área del Δ AGD.
III) El área del trapecio ABFG corresponde a $\frac{2}{3}$ del área del rectángulo ABCD.

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

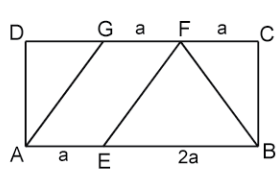
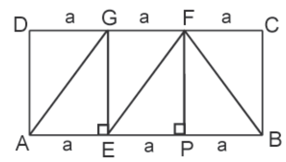


fig. 9

COMENTARIO

En este ítem se requiere que el alumno tenga la capacidad de resolver problemas relativos a la descomposición de polígonos en figuras elementales congruentes entre sí y aplicar los criterios de congruencia de triángulos.

En efecto, si en la figura 9 se trazan los segmentos EG y FP, como se muestra en la siguiente figura, entonces el rectángulo ABCD queda dividido en 6 triángulos rectángulos congruentes entre sí, estas congruencias quedan demostradas por el criterio LAL, ya que todos los triángulos tienen un cateto de medida a, un ángulo recto y un cateto de igual medida a la del lado $\overline{AD}$.



De acuerdo al análisis realizado se tiene que la afirmación I) es verdadera. Igual sucede con la afirmación II), ya que el Δ EBF está formado por dos triángulos congruentes al Δ AGD.

Por último, la afirmación III) también es verdadera, pues como se concluyó que el rectángulo ABCD está formado por 6 triángulos congruentes entre sí y el trapecio ABFG está formado por 4 de estos triángulos, luego el área del trapecio es $\frac{4}{6}$ del área del rectángulo, que simplificado es $\frac{2}{3}$.

La veracidad de las afirmaciones II) y III), también se puede determinar calculando las áreas de los polígonos respectivos (triángulos EBF y AGD, trapecio ABFG y rectángulo ABCD).

Como las tres afirmaciones son verdaderas, la clave es E). El 30,2% de las personas que enfrentaron el ítem marcó esta opción, por lo que es considerado difícil, además, tuvo una alta omisión (43%).

El 14% de los postulantes se inclinó por el distractor B), quizás los que marcaron esta opción resolvieron el ítem haciendo los cálculos de las áreas respectivas y se equivocaron en alguno de ellos, o bien desconocían la fórmula del área del trapecio.

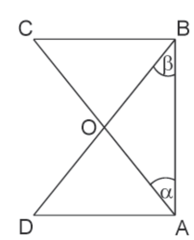
PREGUNTA 41

Si en la figura 10, $\overline{DA} \perp \overline{BA}$, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ y $\alpha = \beta$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $\overline{CB} \cong \overline{DA}$
II) $\overline{DB} \cong \overline{AC}$
III) $\overline{OA} \perp \overline{OB}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

fig. 10



COMENTARIO

En esta pregunta el postulante debe recordar y aplicar alguno de los criterios de congruencia de triángulos.

Con los datos dados tanto en el enunciado como en la figura se puede establecer que Δ ABC $\cong$ Δ BAD, por ejemplo, por el criterio de congruencia de triángulos ángulo–lado–ángulo (ALA), ya que $\sphericalangle$ DBA = $\sphericalangle$ CAB = α, $\overline{AB}$ es un lado común a ambos triángulos y $\sphericalangle$ CBA = $\sphericalangle$ DAB = 90°.

Entonces, como los triángulos ABC y BAD son congruentes, se tiene que las afirmaciones I) y II) son verdaderas, pues los lados $\overline{CB}$ y $\overline{DA}$ y los lados $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ son los lados correspondientes de los triángulos congruentes mencionados anteriormente.

La afirmación III) sólo es verdadera si α = 45°, pero en el enunciado se pedía que siempre fuese verdadera, o sea, para cualquier valor de α. Luego, como sólo las afirmaciones I) y II) son siempre verdaderas, la clave es C), que fue marcada por el 26% de los postulantes que enfrentaron el ítem, resultándo éste difícil.

La omisión alcanzó al 38% y el 27% de los alumnos optó por el distractor E), los cuales consideraron que la afirmación III) era verdadera, ellos no se dieron cuenta que ésta sólo es verdadera para un caso particular, porque probablemente se dejaron llevar por la figura, la cual es sólo indicativa. En efecto, si α = 20°, entonces $\sphericalangle$ AOB = 140° y por tanto, no es recto.

PREGUNTA 42

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) El triángulo tiene tres ejes de simetría.
B) El rectángulo tiene cuatro ejes de simetría.
C) La circunferencia tiene sólo dos ejes de simetría.
D) El trapecio isósceles tiene un eje de simetría.
E) El cuadrado tiene sólo dos ejes de simetría.

COMENTARIO

En este caso, para responder correctamente el ítem el alumno debe tener la capacidad de determinar cuántos ejes de simetría tiene una figura dada y para ésto, debe analizar las afirmaciones que aparecen en todas las opciones y determinar cuál de ellas es siempre verdadera.

Es así como, la afirmación de la opción A) es falsa, ya que en ésta se habla de un triángulo cualquiera y se sabe que sólo el triángulo equilátero tiene tres ejes de simetría.

Ahora, la afirmación en B) también es falsa, pues el rectángulo tiene sólo dos ejes de simetría, que son las rectas que pasan por los puntos medios de sus lados opuestos.

En C) la afirmación también es falsa, por que en una circunferencia todos sus diámetros son ejes de simetría de ella y éstos son infinitos.

La afirmación de la opción D) es verdadera, pues un trapecio isósceles siempre tiene un eje de simetría, que corresponde a la recta que pasa por los puntos medios de sus bases.

Por último, la afirmación de la opción E) es falsa, ya que el cuadrado tiene cuatro ejes de simetría, que son las diagonales y las rectas que pasan por los puntos medios de los lados opuestos.

Por lo tanto, D) es la clave. Esta pregunta resultó difícil, sólo el 22% de los postulantes marcó la opción correcta y la omisión fue muy alta, alcanzando el 39%.

El distractor más marcado fue A), con una adhesión del 18%, los que marcaron esta opción, probablemente no se percataron que la afirmación sólo es verdadera para el triángulo equilátero y no para cualquiera.

PREGUNTA 43

En el sistema de ejes coordenados de la figura 11 se ha ubicado el punto P(a, b), ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) El simétrico de P con respecto al eje x es P'(a, –b).
II) El simétrico de P con respecto al origen es P''(–a, –b).
III) El simétrico de P con respecto a un punto en el primer cuadrante es otro punto que está en el primer cuadrante.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

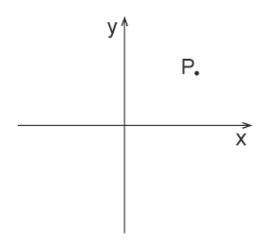


fig. 11

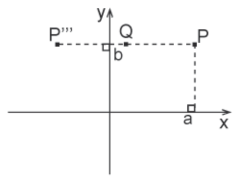
COMENTARIO

El contenido de esta pregunta está relacionado con la simetría axial y puntual de un punto en un sistema de ejes coordenados.

Al aplicar a un punto una simetría con respecto al eje x, se tiene que su simétrico sólo tiene cambiado el signo de la ordenada del punto original, por lo que el simétrico del punto P(a, b) con respecto a este eje es P'(a, –b). Luego, la afirmación I) es verdadera.

Ahora, al aplicar a un punto una simetría con respecto al origen de un sistema de ejes coordenados se tiene que su simétrico tiene cambiado el signo de ambas coordenadas del punto original. Luego el simétrico de P(a, b) con respecto al origen es P''(–a, –b) y por lo tanto, la afirmación II) es también verdadera.

Al analizar la afirmación III) se tiene que ésta es falsa. Por ejemplo, si el punto P perteneciera al primer cuadrante y el punto con respecto al que se haría la simetría estuviese ubicado como lo está el punto Q en la siguiente figura, se obtendría que el simétrico de P con respecto a Q se ubicaría en el segundo cuadrante (P''') y no en el primero como lo indica la afirmación.



Por los análisis anteriores se tiene que la clave es C), marcada por el 21% de los alumnos que enfrentaron el ítem, lo que indica que éste resultó difícil. Además, de la alta omisión (62%) se puede concluir que hay un gran desconocimiento del tema.

Las personas que erraron su respuesta se distribuyeron en porcentajes parecidos entre los distractores, siendo el mayor porcentaje el del distractor E) (5%). En este caso, posiblemente no se percataron de que si el centro de simetría está en el primer cuadrante y muy cerca de los ejes coordenados y el punto P muy alejado de él, también en el primer cuadrante, entonces el simétrico de éste se ubica en un cuadrante distinto al que está ubicado P y por lo tanto, la afirmación III) no es siempre verdadera.

PREGUNTA 44

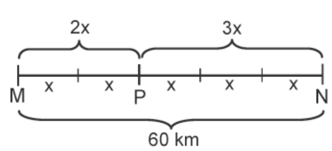
Se ubicará una estación de gasolina P **entre** las ciudades M y N, que distan 60 km entre ellas, de modo que las distancias de las ciudades a la gasolinera estén en la proporción MP : PN = 2 : 3. Si la estación de gasolina estará en línea recta con las ciudades M y N, ¿a qué distancia de la ciudad M quedará ubicada la estación de gasolina?

A) A 12 km
B) A 24 km
C) A 30 km
D) A 36 km
E) A 48 km

COMENTARIO

En esta ocasión el postulante debe resolver un problema contextualizado, en el que debe dividir interiormente un trazo en una razón dada.

En primer lugar, para dar solución al problema es recomendable representar los datos dados en el enunciado en una figura que permita visualizar la información entregada, tal como se muestra a continuación:



En efecto, como $\overline{MN}$ está dividido interiormente por el punto P, tal que MP : PN = 2 : 3, se tiene que $\overline{MP}$ es 2 partes del total y $\overline{PN}$ es 3 partes del total de las partes en que quedaría dividido $\overline{MN}$, luego éste quedaría dividido en 5 partes de x km cada una. Con esta información se plantea la ecuación 5x = 60, de donde x = 12 km.

Ahora, como se pide a qué distancia de la ciudad M quedará ubicada la estación de gasolina P, se tiene que MP = 2x = 2 · 12 = 24 km, medida que se encuentra en la opción B).

El 46% de los alumnos que abordaron este ítem marcó la clave, por lo que la pregunta se considera de mediana dificultad. A pesar de esto, la omisión fue alta (31%).

En cuanto a los distractores, el más marcado fue C), con un 13%. Es posible que los postulantes sólo dividieran la distancia entre las ciudades por las partes que correspondían a la distancia entre M y P, o sea, 60 : 2 = 30 km.

PREGUNTA 45

En la figura 12, BC y CA son rectas secantes a la circunferencia, C pertenece a ella y L es una recta que contiene al diámetro $\overline{AB}$. ¿Cuál de las siguientes relaciones es **siempre** verdadera?

A) $\alpha + \beta = \delta$
B) $\alpha = \beta$
C) $(\alpha + \beta) > 90°$
D) $\alpha = \beta = \delta$
E) $\delta = \frac{\alpha + \beta}{2}$

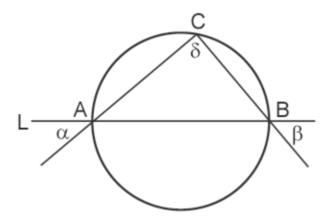


fig. 12

COMENTARIO

Para que esta pregunta sea contestada correctamente el alumno debe recordar que un ángulo inscrito en una circunferencia que subtiende una semicircunferencia es recto y recordar de la Enseñanza Básica que los ángulos interiores de un triángulo suman 180°.

En la figura se observa que el ángulo δ subtiende una semicircunferencia, por lo tanto mide 90°. Además, al aplicar la propiedad de los ángulos opuestos por el vértice se tiene que $\measuredangle$ CAB = α y $\measuredangle$ CBA = β.

Ahora, como los ángulos CAB, ABC y BCA son los ángulos interiores de un triángulo se tiene que $\alpha + \beta + \delta = 180°$, que es equivalente a $\alpha + \beta = 180° - \delta$ y como $\delta = 90°$, se tiene que $\alpha + \beta = 90° = \delta$, relación que se encuentra en la opción A).

El ítem resultó difícil, ya que sólo lo contestó correctamente un cuarto de los postulantes. Además, la omisión es considerada muy alta (54%) para un problema de este tipo, que requiere del conocimiento de relaciones básicas entre ángulos.

Por otra parte, se tiene que el distractor B) fue el más seleccionado, con una preferencia del 8%. La relación planteada en esta opción es verdadera sólo si el Δ ABC es isósceles, hecho que no se plantea ni en el enunciado, ni en la figura y tampoco se puede deducir con los datos entregados.

PREGUNTA 46

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
B) Todos los cuadrados son semejantes.
C) Todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes.
D) Todos los círculos son semejantes.
E) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

COMENTARIO

El ítem apunta al contenido de semejanza de figuras planas, donde los alumnos deben tener claro que dos figuras son semejantes cuando la razón entre las medidas de sus lados homólogos (o correspondientes) es constante y sus ángulos correspondientes son iguales.

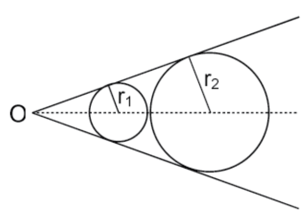
Además, deben recordar los criterios de semejanza de triángulos, en particular conocer el criterio AA, que señala que dos triángulos son semejantes si al menos dos de sus ángulos interiores correspondientes, son respectivamente, congruentes.

Al analizar la afirmación que aparece en A), se tiene que ésta es verdadera, ya que como los ángulos correspondientes de los triángulos equiláteros son todos iguales a 60°, por el criterio AA, éstos son semejantes.

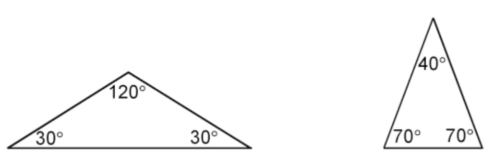
En B) se tiene que la afirmación planteada también es verdadera, pues los ángulos correspondientes de los cuadrados son todos iguales a 90° y la razón entre las medidas de sus lados homólogos es constante.

Para C), todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes, debido a que todos estos triángulos tiene un ángulo interior de 90° y dos de 45° y por el criterio AA se cumple la semejanza, por lo tanto, esta afirmación es verdadera.

En la opción D) se plantea que todos los círculos son semejantes, lo cual es verdadero, ya que se sabe que dos figuras son semejantes si existe una transformación homotética que transforme una de ellas en la otra, que es lo que ocurre con los círculos, tal como se muestra en la siguiente figura, donde O es el centro de homotecia y la razón entre sus radios ($r_1 : r_2$) es la razón de homotecia.



Por último, al analizar la afirmación que se tiene en E), se concluye que ésta es falsa, pues dos figuras que son semejantes deben tener los ángulos correspondientes de igual medida y esto no necesariamente ocurre entre dos triángulos isósceles. Por ejemplo, se podrían tener los triángulos mostrados en la siguiente figura, que si bien son isósceles, no tienen los ángulos correspondientes congruentes.



El ítem lo contestó correctamente el 29% de los alumnos, por lo que éste es considerado estadísticamente como difícil. Además, hubo un 40% de los postulantes que no supo como contestar el ítem y lo omitió.

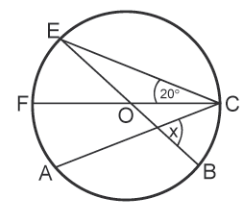
El 14% de los alumnos marcó el distractor C), los cuales consideran que los triángulos rectángulos isósceles no son semejantes, situación que es falsa pues todos estos tipos de triángulos, independiente del tamaño, tienen un ángulo recto y dos ángulos interiores que miden cada uno 45° y por lo tanto, sus ángulos correspondientes son iguales.

PREGUNTA 47

En la figura 13, $\overline{EB}$ y $\overline{FC}$ son diámetros de la circunferencia de centro O y $\overline{CF}$ es bisectriz del ángulo ECA. La medida del ∢ x es

A) 60°
B) 40°
C) 80°
D) 90°
E) 120°

fig. 13



COMENTARIO

La pregunta está referida al teorema que indica que la medida de un ángulo del centro de una circunferencia es el doble de la medida de un ángulo inscrito en ella que subtiende el mismo arco. Además, el postulante para resolverla debe conocer algunos conceptos básicos de ángulos y triángulos tratados en la Enseñanza Básica, como el de la bisectriz y ángulos exteriores de un triángulo.

En primer lugar, se tiene que ∢ FCA = 20°, ya que $\overline{CF}$ es bisectriz del ∢ ECA y ∢ EOF = 40°, pues el ángulo del centro EOF subtiende el mismo arco que el ángulo inscrito ECF.

Luego, se tiene que ∢ BOC = 40°, por ser opuesto por el vértice con el ∢ EOF y por último, como el ángulo x es exterior a un triángulo se tiene que ∢ x = ∢ FCA + ∢ BOC = 20° + 40° = 60°, valor que se encuentra en la opción A).

Este ítem resultó difícil, pues lo contestó correctamente sólo el 23% de los alumnos y se tiene que la omisión fue del 50%, considerada muy alta para un ítem de este tipo.

El distractor con mayor adhesión fue B) con un 17%, probablemente, los postulantes se equivocaron al confundir el ángulo x con un ángulo del centro que subtiende igual arco que el ángulo inscrito CEB.

PREGUNTA 48

En la figura 14, el segmento BC mide 15 cm y es tangente en C a la circunferencia de centro O. Si O está en el segmento AB que mide 25 cm y A pertenece a la circunferencia, ¿cuántos centímetros mide el diámetro?

A) 8
B) 16
C) 9
D) 16,6
E) 24,6

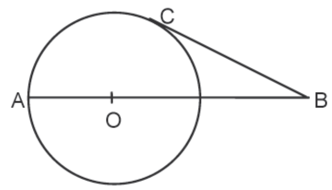
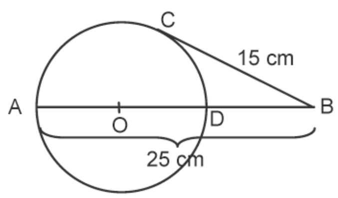


fig. 14

COMENTARIO

Para resolver el ítem el alumno debe aplicar el teorema relativo a proporcionalidad de trazos en la circunferencia, que relaciona los segmentos que determinan en una circunferencia una tangente y una secante a ella, que se intersectan en un punto.

Si se colocan los datos dados en el enunciado en la figura y el punto D es la intersección de la circunferencia con el trazo AB, se tiene:



En la figura $\overline{BC}$ es tangente y $\overline{AB}$ es secante a la circunferencia y por lo tanto, se cumple la propiedad: $BC^2 = BD \cdot BA$, con $BD = 25 - AD$.

Al reemplazar en esta igualdad los datos dados, se tiene que $15^2 = (25 - AD) \cdot 25$, o sea $225 = 625 - 25AD$, que es equivalente a $25AD = 400$, de donde se obtiene que el diámetro $\overline{AD}$ mide 16 cm, respuesta que se encuentra en la opción B).

La pregunta resultó difícil, con sólo un 15% de respuestas correctas y una omisión muy alta (68%), lo que deja en evidencia el desconocimiento que tienen los alumnos de la propiedad requerida en este problema.

Los distractores más marcados fueron D) (6%) y C) (5%). En el primer caso es posible que los alumnos se dejaran guiar por la figura y consideraran que AO = OD = DB, por lo que la medida de $\overline{AB}$ la dividieron por 3 para encontrar la medida del radio de la circunferencia, obteniendo que ésta era 8,3 cm, aproximadamente, y luego multiplicaron por 2 esta medida para obtener que el diámetro medía 16,6 cm. En el otro caso, la medida que marcaron como correcta es la que corresponde al segmento DB.

PREGUNTA 49

Un agricultor tiene un terreno en forma de triángulo rectángulo, como el triángulo ABC de la figura 15. Desea plantar hortalizas y para ello divide el terreno en cinco sitios, con divisiones paralelas al lado $\overline{AC}$. Si en el sector achurado plantará lechugas, ¿cuál es el área de dicho sector?

A) $\frac{2}{5}ab$

B) $\frac{6}{5}ab$

C) $\frac{12ab}{5}$

D) $\frac{3ab}{2}$

E) $\frac{8ab}{5}$

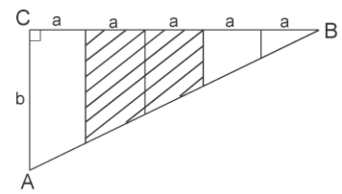
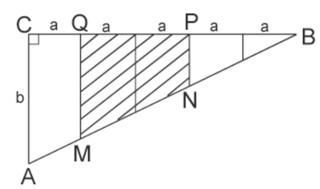


fig. 15

COMENTARIO

Para resolver este problema el alumno debe aplicar el teorema de Thales sobre trazos proporcionales en un triángulo, para así determinar la medida de las bases del trapecio representado en el sector achurado. Además, debe recordar de la Enseñanza Básica la fórmula para determinar el área de un trapecio, que corresponde al producto entre la semisuma de las medidas de las bases y la medida de su altura.

En primer lugar y con el objeto de realizar una mejor explicación de la resolución del problema se ubicaran en la figura los puntos M, N, P y Q, como se muestra a continuación:



Ahora, si se designa por **x** a la medida de la base menor $\overline{PN}$ del trapecio que corresponde al sector achurado y se aplica el teorema de Thales se tiene que $\frac{BP}{PN} = \frac{BC}{CA}$, de donde $\frac{2a}{x} = \frac{5a}{b}$, llegando a $x = \frac{2b}{5}$. De igual modo, si se designa la base mayor $\overline{QM}$ del trapecio por **y**, se tiene $\frac{BQ}{QM} = \frac{BC}{CA}$, de donde $\frac{4a}{y} = \frac{5a}{b}$, obteniéndose que $y = \frac{4b}{5}$.

Como la altura $\overline{PQ}$ del trapecio es 2a, se determina el área de éste como $\frac{1}{2}\left(\frac{2b}{5} + \frac{4b}{5}\right) \cdot 2a = \frac{1}{2} \cdot \frac{6b}{5} \cdot 2a = \frac{6}{5}ab$, expresión que se encuentra en la opción B), la cual fue seleccionada sólo por el 7% de los postulantes, por lo que el ítem resultó muy difícil.

Además, se destaca la alta omisión de la pregunta (63%), donde se evidencia que los alumnos no saben como enfrentar un problema contextualizado de geometría de este tipo.

Por otro lado, llama la atención la alta adhesión al distractor A), con un 23%, donde es posible que los postulantes calcularan el área del sector achurado como el área de un triángulo cuya base es la base mayor del trapecio, que es QM = $\frac{2b}{5}$ y como altura PQ = 2a, o sea, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2b}{5} \cdot 2a = \frac{2}{5}ab$.

PREGUNTA 50

Las medidas de los lados de un triángulo son a, b y c, donde c es el lado mayor. Para que el triángulo sea rectángulo debe ocurrir que

A) $a = b$ y $c = 2a$
B) $c = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
C) $a = \sqrt{c^2 - b^2}$
D) $(a + b)^2 = c^2$
E) $c = \sqrt{a + b}$

COMENTARIO

El ítem apunta al reconocimiento de tríos de números que satisfacen el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo, el cual dice que la suma de los cuadrados de las medidas de sus catetos es igual al cuadrado de la medida de su hipotenusa.

En este caso, como a, b y c son las medidas de los lados del triángulo y c es el lado mayor, se debiera suponer que c es la medida de la hipotenusa si es que el triángulo es rectángulo.

Luego, se debiese cumplir la relación que establece el teorema de Pitágoras, o sea, $a^2 + b^2 = c^2$. Ahora, si se despeja **a** se tiene que $a^2 = c^2 - b^2$ y si se extrae raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad se obtiene que $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, relación que aparece en la opción C).

Esta opción fue marcada sólo por el 18% de los alumnos que enfrentaron el ítem, por lo que éste es considerado difícil, siendo la omisión del 58%. Los datos anteriores llaman la atención pues este teorema se enseña en la Enseñanza Básica y se profundiza en la Enseñanza Media.

El distractor D) tuvo un 8% de adhesión, en este caso es posible que reconocieran el teorema de Pitágoras, pero aplicaron erradamente la factorización $a^2 + b^2 = (a + b)^2$, la que es muy común entre los estudiantes.

También, destaca el distractor A) con una adhesión del 7%, es posible que al determinar si se verificaba la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$, reemplazaron b por a y c por 2a obteniendo $a^2 + a^2 = (2a)^2$ y eliminaron en forma incorrecta el paréntesis, llegando a $2a^2 = 2a^2$.

PREGUNTA 51

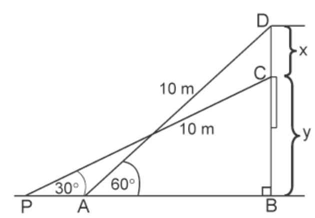
El extremo superior de una escalera de 10 metros de longitud coincide con el borde superior de un muro vertical, cuando forma un ángulo de 60° con la horizontal. Si esta escalera se apoyara en el extremo superior de una ventana del mismo muro, formaría un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Cuál es la distancia entre el borde superior del muro y la parte superior de la ventana?

A) $5(\sqrt{3} - 1)$ metros
B) 5 metros
C) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ metros
D) 2 metros
E) $5\sqrt{3}$ metros

COMENTARIO

Esta pregunta es un problema contextualizado que requiere del postulante la capacidad de comprender el enunciado, representar la situación en una figura, para luego aplicar razones trigonométricas.

Es así como el siguiente dibujo ilustra la situación planteada en el enunciado:



Para determinar la distancia **x** entre el borde superior del muro (D) y la parte superior de la ventana (C), se determinará el valor de **y**, el cual se calcula aplicando la razón trigonométrica sen $\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ en el Δ PBC.

En efecto, sen 30° = $\frac{y}{10}$, de donde y = 10 sen 30° y como sen 30° = $\frac{1}{2}$, se tiene que y = $10 \cdot \frac{1}{2}$ = 5 metros.

Ahora, para obtener el valor de **x** se aplica la misma razón trigonométrica en el Δ ABD, con DB = x + y = x + 5, obteniéndose que sen 60° = $\frac{x + 5}{10}$, luego x + 5 = 10 sen 60°, de donde x = 10 sen 60° – 5 y como sen 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, se tiene que la medida de x es $10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 = 5\sqrt{3} - 5 = 5(\sqrt{3} - 1)$ metros.

Por el desarrollo anterior se tiene que la clave es A), con un 8% de respuestas correctas, por lo que este ítem contextualizado también resultó muy difícil.

Además, obtuvo una omisión altísima, del 76%, quizás se deba a que los postulantes no realizaron un buen dibujo que ilustrara la situación, o bien, no supieron como enfrentarlo, por desconocimiento del contenido involucrado.

Por otro lado, el distractor B) fue el más marcado, con un 6%, es posible que los alumnos interpretaran mal la pregunta y contestaran por la distancia que hay entre la parte superior de la ventana y el suelo, o sea, el valor de y.

PREGUNTA 52

¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) sen 45° = cos 45°
II) sen 30° = cos 60°
III) sen 45° = tg 45°

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

COMENTARIO

Para contestar correctamente esta pregunta los postulantes deben saber el valor numérico de las razones trigonométricas de los ángulos elementales (30°, 45° y 60°).

En efecto, las igualdades que aparecen en I) y en II) son verdaderas, ya que sen 45° = cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y sen 30° = cos 60° = $\frac{1}{2}$.

También, se puede decir que estas igualdades son verdaderas, sabiendo que siempre se verifica que sen α = cos (90° – α), situación que se cumple en I y en II).

En cambio, la igualdad que aparece en III) es falsa, pues sen 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y tg 45° = 1.

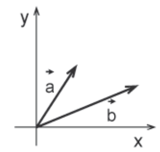
Luego, la clave es C), que fue marcada por el 21% de los alumnos, por lo que el ítem resultó difícil. La omisión fue del 56%, bastante alta, pues aquí se está preguntando por el valor de las razones trigonométricas básicas.

Ahora, el distractor más marcado fue B) con un 10% de las preferencias, es posible que los postulantes no supieran el valor del seno y del coseno de 45° y tampoco supieran como determinarlos.

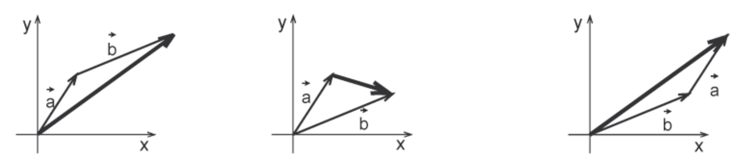
PREGUNTA 53

En la figura 16 están representados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. ¿Cuál(es) de los gráficos presentados en I), en II) y en III) representa(n) la suma de estos dos vectores?

fig. 16



I) II) III)



A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) Sólo II y III

COMENTARIO

El ítem en este caso apunta a la operatoria básica con vectores en el plano, en particular los alumnos deben comprender cómo se realiza la adición de vectores en el sistema de ejes coordenados.

Uno de los métodos para hallar el vector suma ($\vec{a}$ + $\vec{b}$), es dibujar uno de ellos, por ejemplo, $\vec{a}$ y luego copiar el otro vector $\vec{b}$ a continuación de él, de tal manera que el extremo de $\vec{a}$ coincida con el origen de $\vec{b}$, luego el vector suma tiene su origen en el origen de $\vec{a}$ y su extremo en el extremo de $\vec{b}$, situación que se ilustra en el gráfico que aparece en I).

Si se repite el procedimiento anterior pero copiando en primer lugar el vector $\vec{b}$ y luego $\vec{a}$, se obtiene que el gráfico que aparece en III), también representa la suma entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

En cambio, el gráfico que aparece en II) muestra un vector que no corresponde a la suma entre los vectores dados, pues corresponde al vector $\vec{b}$ – $\vec{a}$.

El desarrollo anterior permite establecer que la clave es D), opción que obtuvo un 31% de respuestas correctas, por lo que el ítem resulto difícil. Además, éste obtuvo un porcentaje de omisión del 49%.

Cabe hacer notar que el 11% de los alumnos marcó el distractor B), que corresponde a la opción opuesta a la clave. Este porcentaje junto al de omisión, dan evidencia de lo poco conocido que es para los alumnos este tema.

PREGUNTA 54

Un cuadrado de lado **a** se hace girar, indefinidamente, en torno a uno de sus lados. El área de la superficie lateral del cuerpo generado es

A) $2a^2$
B) $2\pi a^2$
C) $6a^2$
D) πa^2
E) $4a^2$

COMENTARIO

En esta oportunidad estamos en frente de un problema sencillo sobre áreas de cuerpos generados por la rotación de una figura plana. Además, el postulante debe recordar de la Enseñanza Básica que la longitud de una circunferencia se calcula como $2\pi r$, donde r es su radio y que el área de un rectángulo se calcula como el producto de la medida de dos de sus lados consecutivos.

En primer lugar, para responder el ítem hay que reconocer que al hacer girar indefinidamente el cuadrado en torno a uno de sus lados se genera un cilindro, que tiene por superficie lateral, el equivalente a un rectángulo en el plano, cuyos lados son la altura del cilindro y la longitud de la circunferencia que tiene por base el cilindro.

Ahora, como el cuadrado es de lado **a**, se tiene que la altura del cilindro es **a** y que el radio de la base también es **a**, luego la longitud de la circunferencia de la base es $2\pi a$. Es así como, el área de la superficie lateral es $a \cdot 2\pi a = 2\pi a^2$.

Este resultado se encuentra en la opción B), que fue seleccionada por el 14% de los postulantes, por lo que el ítem resultó difícil. La omisión alcanzó al 60%, bastante alta, considerando que lo que se pregunta es básico dentro del tema tratado.

Los distractores más marcados fueron A) y D), cada uno con un 8% de adhesión. En A) es posible que consideraran que los lados del rectángulo eran 2a y a, sin hacer un mayor análisis, luego el área pedida sería $2a^2$. En cambio, en D) es posible que confundieran el área lateral del cilindro con el área de la base de éste.


EL TRIÁNGULO EQUILÁTERO
TIENE TODOS SUS
Costa
Rolls
Crocante
Costa
Rolls
Blanco
Crocante
Costa
Rolls
Nuts
Irresistibles
Costa