EL MERCURIO

FACSÍMIL PSU® 2006

DOCUMENTO OFICIAL

PROCESO DE ADMISIÓN 2007 | DOCUMENTO OFICIAL

RESOLUCIÓN

PREGUNTAS 36 A 54

Universidad de Chile
VICERRECTORÍA DE ASUNTOS ACADÉMICOS
DEMRE

CONSEJO DE RECTORES
UNIVERSIDADES CHILENAS

Matemática

JUEVES 24 DE AGOSTO DE 2006

SERIE DEMRE Nº 17

RESOLUCIÓN FACSÍMIL DE MATEMÁTICA, PARTE III

INTRODUCCIÓN

La presente publicación se abocará al análisis de las preguntas 36 a la 54, correspondientes al eje temático de Geometría, contenidas en el facsímil de Matemática publicado el 1 de junio recién pasado.

Cabe señalar que de los cuatro ejes temáticos que conforman la PSU® en la parte matemática, es Geometría el que presenta, año a año, el menor porcentaje medio de respuestas correctas y el mayor porcentaje medio de omisión.

Por lo tanto, es importante, tanto para profesores como para estudiantes, revisar todos los contenidos de geometría publicados el 22 de abril del 2006. Además, de esos contenidos para poder responder las preguntas de este eje temático, los estudiantes deben, por una parte, haber desarrollado las habilidades cognitivas, desde la más básica de Reconocimiento hasta la capacidad de realizar Análisis, Síntesis y Evaluación, y por otra parte, recordar y aplicar contenidos previos que se suponen internalizados durante la Enseñanza Básica y que deberían ser reforzados contínuamente, durante la Enseñanza Media.

En consideración a lo anterior es que esta publicación se centrará en el análisis de los ítemes de este eje temático en el que se especificará el contenido al que apunta la pregunta y los tópicos previos que son necesarios para su resolución, indicando para cada uno de ellos el grado de dificultad con que resultó en el momento de su aplicación, y el porcentaje de omisión. También se mostrará la forma de resolver estas preguntas, enfatizando las capacidades necesarias que debe tener el estudiante para su correcta resolución y señalando los errores que éstos cometieron al resolverla.

COMENTARIOS DE LAS PREGUNTAS REFERIDAS AL EJE TEMÁTICO DE GEOMETRÍA

36. En la figura 3, EFGH es un rectángulo. Si Δ AHD $\cong$ Δ CFB y Δ DGC $\cong$ Δ BEA, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s) ?

    I) $\measuredangle$ DCB $\cong$ $\measuredangle$ DAB
    II) $\overline{DC} \cong \overline{AB}$
    III) $\measuredangle$ DCG $\cong$ $\measuredangle$ ADG

    A) Sólo I
    B) Sólo II
    C) Sólo I y II
    D) Sólo II y III
    E) I, II y III

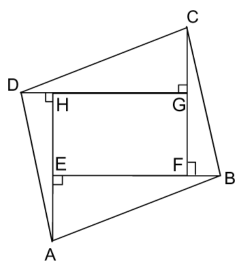


fig. 3

Comentario:

El contenido de este ítem es de primer año de Enseñanza Media referido a congruencia de triángulos y sus criterios de congruencia.

El alumno debe comprender los datos que se le entregan en el enunciado y utilizarlos para analizar la veracidad o falsedad de las afirmaciones I, II y III.

Como Δ AHD $\cong$ Δ CFB se concluye que $\measuredangle$ DAH = $\measuredangle$ BCF, y como Δ DGC $\cong$ Δ BEA, se tiene que $\measuredangle$ EAB = $\measuredangle$ GCD.

Luego, $\measuredangle$ DAH + $\measuredangle$ EAB = $\measuredangle$ BCF + $\measuredangle$ GCD, que es lo mismo que $\measuredangle$ DAB = $\measuredangle$ BCD, por lo tanto **I) es verdadera**.

Para II) basta con inferir que si dos triángulos son congruentes sus respectivos lados también lo son, y como Δ DGC $\cong$ Δ BEA se tiene que $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ (se oponen a iguales ángulos de 90°), luego **II) es verdadera**.

En III), como Δ ADH no es congruente con Δ DCG, no podemos concluir que $\measuredangle$ DCG $\cong$ $\measuredangle$ ADG, luego **III) es falsa**.

Por lo tanto la opción correcta es C).

El estudio estadístico de este ítem nos indica que fue un problema de mediana dificultad, siendo contestado acertadamente por el 49,4% de los alumnos que se enfrentaron a él, pero llama la atención su alta omisión, de un 32,2%, de lo que podemos concluir que siendo un contenido sencillo que se trabaja habitualmente en las salas de clases, aún no es dominado por la totalidad de los alumnos. Los demás postulantes se distribuyeron de igual forma dentro de los distractores, enfatizando aún más, la poca claridad existente en relación a la Congruencia de Triángulos.

37. Si dos circunferencias son congruentes, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s) ?

    I) Sus perímetros son iguales.
    II) Sus radios son de igual longitud.
    III) Sus centros son coincidentes.

    A) Sólo III
    B) Sólo I y II
    C) Sólo I y III
    D) Sólo II y III
    E) I, II y III

Comentario:

El alumno para resolver este ítem debe comprender muy bien el concepto de congruencia de dos figuras planas, tema tratado en el primer año de Enseñanza Media.

Se debe recordar que dos figuras planas son congruentes cuando son idénticas en tamaño y forma.

Además, se debe manejar los conceptos asociados a una circunferencia (perímetro, radio) vistos en Enseñanza Básica.

Entonces, si dos figuras son congruentes, necesariamente sus perímetros son iguales, por lo tanto **I) es verdadera**. Además, al ser las circunferencias congruentes sus diámetros son iguales por lo tanto sus radios son de igual medida, lo que determina que **II) es verdadera**.

La afirmación **III) es falsa**, no necesariamente dos circunferencias que son congruentes son coincidentes, lo pueden ser en algún caso particular, pero no siempre. Por lo tanto la opción correcta es B).

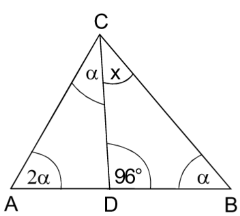
Los datos estadísticos nos indican que esta pregunta resultó difícil, ya que de los postulantes que la abordaron sólo un 15% la contestó correctamente, y más de un tercio de la población la omitió. Todo esto, ratifica aún más el hecho de que el contenido de Congruencia es poco manejado por los estudiantes de la Enseñanza Media.

El distractor E) lo contestó poco más de un tercio de los estudiantes, tal vez superpusieron dos circunferencias congruentes, pero no analizaron más casos, resultándoles como verdadera la afirmación III).

38. ¿Cuánto mide el ∢ x en el Δ ABC de la figura 4 ?

A) 32°
B) 39°
C) 45°
D) 52°
E) No se puede determinar, faltan datos.

fig. 4



Comentario:

Para resolver este ítem el alumno debe recordar las relaciones entre los ángulos de los triángulos (ángulos interiores, exteriores y suplementarios), contenido visto en Enseñanza Básica, y posteriormente analizar las relaciones que se dan entre los ángulos del triángulo ABC, para así, plantear y resolver un par de ecuaciones de primer grado simples, tema tratado en primer año de la Enseñanza Media.

En efecto, como ∢ CDB es igual a 96°, se tiene que el ∢ ADC es igual a 84°, por ser ángulos suplementarios.

Como 84° es ángulo exterior del Δ DBC, se tiene que:
$x + \alpha = 84°$ (*).

Por otra parte, en el Δ ADC se tiene que $3\alpha + 84° = 180°$, resolviendo la ecuación se obtiene **$\alpha = 32°$**.

Luego, reemplazando **$\alpha = 32°$** en **(*)**, se llega a que **$x = 52°$**.

Por lo tanto la opción correcta es D).

Esta pregunta resultó sencilla, ya que es un problema rutinario de geometría, sin embargo, la contestó bien sólo el 36,4 % de la población que la abordó.

El 50% de las personas que se enfrentaron a la prueba, se repartieron equitativamente entre los que omitieron y los que contestaron el distractor E), indicando un aprendizaje mal incorporado o un desconocimiento de las relaciones angulares en el triángulo.

39. ¿Cuál es el perímetro de la figura plana (fig. 5) formada por 4 rombos congruentes cuyas diagonales miden 8 cm y 6 cm ?

A) 60 cm
B) 70 cm
C) 80 cm
D) 84 cm
E) 120 cm

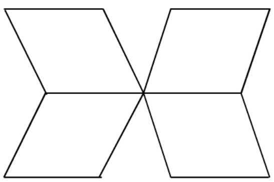


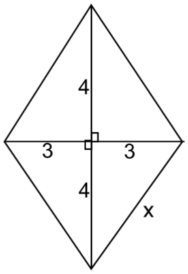
fig. 5

Comentario:

Este ítem se inserta en la resolución de problemas relativos a polígonos y su descomposición en figuras elementales congruentes correspondiente al primer año de Enseñanza Media.

El alumno debe recordar que el rombo es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales, contenido visto en la Enseñanza Básica.

Por otro lado, debe manejar la propiedad de que en un rombo sus diagonales se dimidian formando ángulos de 90° y , por lo tanto, al trazar sus diagonales, se forman en su interior, 4 triángulos rectángulos congruentes entre sí. En este caso, cada rombo de la figura 5 quedaría dividido en 4 triángulos rectángulos de catetos 4 cm y 3 cm, como lo muestra la siguiente figura.



Para calcular el valor del lado del rombo se aplica el teorema de Pitágoras: “En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado". Así, si **x** representa la medida de la hipotenusa se tiene que:

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$x^2 = 25$$
$$x = 5$$

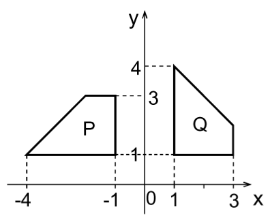
Luego, el perímetro de la figura pedida es la suma sólo de los lados que forman su contorno, es decir, corresponde a 12 veces el valor de la hipotenusa del triángulo lo que da como resultado 60 cm, valor que se encuentra en la opción A).

La pregunta resultó muy difícil, la contestó bien sólo el 17% de los postulantes, y la mitad de las personas que se enfrentaron al ítem la omitieron, lo que demuestra un desconocimiento de las propiedades de un rombo, o del teorema de Pitágoras, o del concepto de perímetro de una figura.

40. En la figura 6, ¿cuál de las siguientes transformaciones rígidas permite obtener el polígono P a partir del polígono Q, si las rotaciones se hacen en sentido antihorario ?

A) simetría (reflexión) con respecto al eje y.
B) rotación en 180° con respecto al origen.
C) simetría (reflexión) con respecto al eje y, y una rotación en 180° con respecto al origen.
D) simetría (reflexión) con respecto al eje x, y una rotación en 180° con respecto al origen.
E) rotación en 90° con respecto al origen.

fig. 6

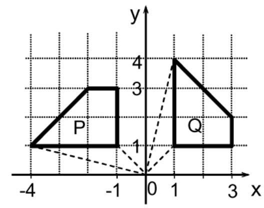


Comentario:

Este es un ítem referido a Traslación, Simetría y Rotación de figuras planas, contenido visto en primer año de Enseñanza Media.

Para su resolución, el alumno debe reconocer qué tipo de isometría se utiliza y para ello debe analizar cómo varían las coordenadas de los puntos de la figura. En este caso es una rotación de 90° con centro en el origen y en sentido antihorario (clave E).

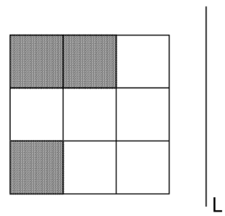
Dicha rotación necesaria para obtener el polígono **P**, a partir del polígono **Q**, se ilustra en la siguiente figura que se ha cuadriculado para su mejor comprensión:



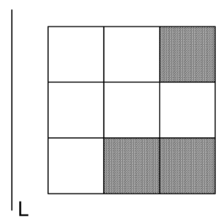
En efecto, al efectuar la rotación en 90º con centro en el origen y sentido antihorario para cada uno de los vértices del polígono, el punto (1, 4) se transforma en (–4, 1); el punto (1, 1) en (–1, 1) y el punto (3, 1) en (–1, 3).

Esta pregunta resultó difícil, la contestó acertadamente sólo la tercera parte de la población que rindió la prueba y la omisión sobrepasó el 50%. El distractor C) fue el más elegido por los alumnos, seguramente por no dominar bien el contenido o simplemente por desconocerlo.

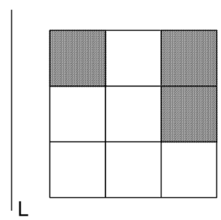
41. ¿Cuál de las siguientes opciones representa una simetría (reflexión) de la figura respecto a la recta L ?



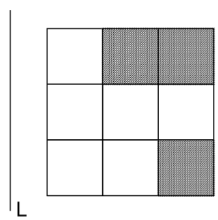
A)



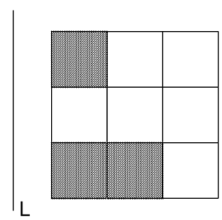
B)



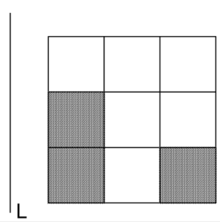
C)



D)



E)



Comentario:

El contenido involucrado en esta pregunta es el de simetrías de figuras planas de primer año de Enseñanza Media.

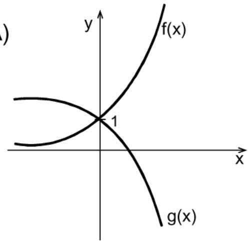
Para responderla correctamente, el alumno debe recordar el concepto de simetría de una figura plana con respecto a un eje de reflexión, en este caso la recta L, según la cual se refleja cada vértice de la figura dada como en un espejo, de tal forma que el vértice reflejado queda a igual distancia de la recta L que el vértice correspondiente de la figura original.

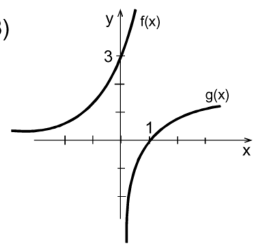
Es decir, si P fuera un vértice de la figura y P' es su simétrico respecto a la recta L, entonces dicha recta es simetral del trazo PP'. Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción C).

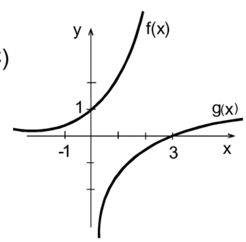
El ítem resultó de dificultad mediana obteniendo un 46,6% de respuestas correctas, pero con una omisión más bien alta, la que sobrepasó el 30%, lo que indica que siendo un problema sencillo todavía existe un desconocimiento de este contenido.

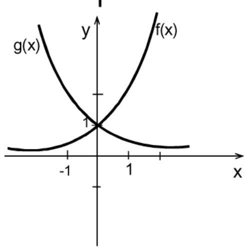
El distractor de mayor preferencia por parte de los postulantes fue D), seguramente confundieron la simetría axial con la simetría puntual y obtuvieron una figura simétrica respecto a un punto de la recta, y no con la recta L.

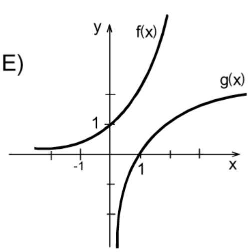
42. Si el gráfico de la función $f(x)$ se obtiene por reflexión del gráfico de la función $g(x)$ respecto de $y = x$. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa esta situación ?

A)


B)


C)


D)


E)


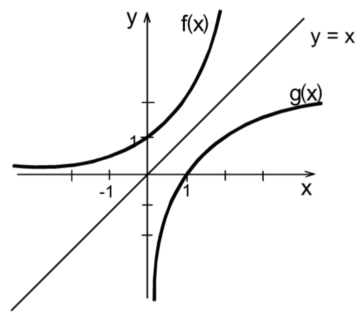
Comentario:

Este es un ítem de primer año de Enseñanza Media que apunta al contenido de simetría de figuras en el sistema de ejes coordenados.

Para responderla correctamente, el alumno debe recordar el concepto de simetría (reflexión), que en este caso corresponde a una simetría del gráfico de una función, con respecto a la recta de ecuación $y = x$.

En primer lugar, se debe graficar dicha recta, y luego buscar la imagen simétrica del gráfico de la función dada, respecto a ella.

La situación anteriormente expuesta, la podemos ver en el siguiente gráfico:



Por lo tanto, la opción correcta es E).

Este ítem resultó difícil ya que sólo un 33,7% lo contestó correctamente y sobre el 50% de los alumnos lo omitió. El distractor más abordado por los postulantes fue D), en este caso el alumno confundió el eje de simetría, usó erróneamente el eje de las ordenadas (y) como eje de simetría, lo que indica que entendió el concepto de reflexión, pero no reconoce o no sabe como graficar una recta de ecuación $y = x$.

43. En la figura 7, las coordenadas del punto A son (–4, –1), ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) ?

I) El punto simétrico de A con respecto al **eje y** es el punto (4, – 1).
II) Al rotar el punto A en 90° en **sentido antihorario**, en torno al origen, se obtiene el punto (–1, 4).
III) Al trasladar el punto A dos unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba, se obtiene el punto (–2, 1).

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

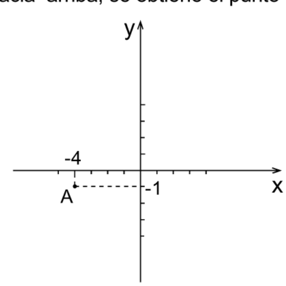
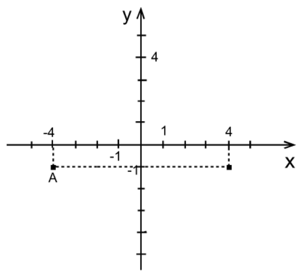


fig. 7

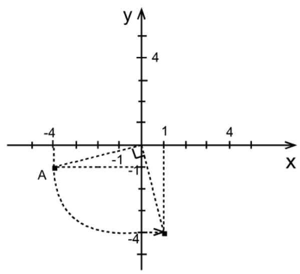
Comentario:

Para responder bien esta pregunta combinada, el alumno debe comprender los conceptos de traslación, rotación y simetría en el sistema de ejes coordenados, tratados en primer año de Enseñanza Media, para aplicarlos en las afirmaciones I), II) y III) y así determinar su valor de verdad.

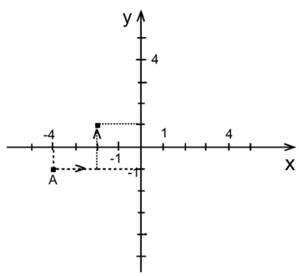
En efecto, como se muestra en el gráfico siguiente, el punto simétrico de A con respecto al **eje y** es el punto (4, – 1), por lo tanto, **I) es verdadera**.



Al rotar el punto A en sentido antihorario y en torno al origen, como se muestra en la siguiente figura, se obtiene el punto (1, –4) y no el punto (–1, 4) como se señala, pues esa rotación sería en sentido horario, por lo tanto **II) es falsa**.



Si se traslada el punto A dos unidades a la derecha y dos unidades hacia arriba, como se muestra en la figura se obtiene el punto (–2, 1) lo que indica que **III) es verdadera**.



Luego, la opción correcta es D).

A pesar de ser un ítem sencillo, en donde el postulante debe aplicar conceptos de isometrías, resultó difícil, con un 34,7% de respuestas correctas y una omisión alta, llegando ésta al 20%.

El distractor C) fue el más elegido por los alumnos (15,6%), lo que ratifica aún más el desconocimiento de parte de los estudiantes del concepto de simetría de un punto respecto a una recta.

44. En la figura 8, ¿cuál(es) de los siguientes triángulos es (son) semejante(s) ?

I) Δ ABE $\sim$ Δ AFD
II) Δ FEC $\sim$ Δ BDC
III) Δ CFE $\sim$ Δ ABE

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

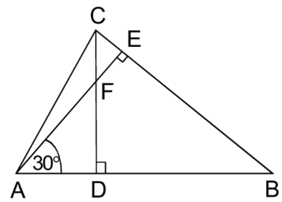


fig. 8

Comentario:

Esta pregunta pertenece al contenido de Semejanza de figuras planas, tema tratado en segundo año de Enseñanza Media. Para contestarla correctamente el alumno debe, a la luz de los datos entregados, aplicar los criterios de semejanza en triángulos.

Además, debe recordar que los ángulos opuestos por el vértice son iguales y que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, contenidos vistos en Enseñanza Básica, para aplicarlos en los triángulos de la figura.

De los datos de la figura se concluye que Δ ABE $\sim$ Δ AFD por criterio AA (dos pares de ángulos correspondientes de igual medida), pues $\measuredangle$ AFD = 60° y $\measuredangle$ ABE = 60° , ya que ambos triángulos son rectángulos, se tiene que **I) es verdadera**.

También Δ FEC $\sim$ Δ BDC, pues $\measuredangle$ CFE = $\measuredangle$ AFD = $\measuredangle$ ABE = 60º, y el $\measuredangle$ FCE = 30° es común a ambos triángulos, por lo tanto **II) es verdadera**, por el mismo criterio anterior, AA.

Por último, Δ CFE $\sim$ Δ ABE, ya que $\measuredangle$ CFE = $\measuredangle$ ABE = 60º y como ambos triángulos tienen un ángulo de 90°, se aplica nuevamente el criterio AA, resultando así que también **III) es verdadera**.

Por lo tanto, la opción correcta es E).

Estadísticamente esta pregunta resultó difícil, la contestó bien sólo un 35% de las personas que rindieron la prueba y la omisión fue alta, sobrepasando el 40%.

El distractor B) fue el más elegido por los alumnos, esto se explica ya que en III), si bien se aplica el mismo criterio de semejanza, se necesita un paso más para darse cuenta que se puede aplicar dicho criterio.

45. En la figura 9, $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$. Si $\overline{CD}$ mide el doble de $\overline{AB}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s) ?

I) Los triángulos OAB y OCD son rectángulos.
II) Los triángulos OAB y OCD son semejantes.
III) $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{OA}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

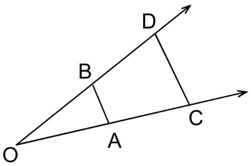


fig. 9

Comentario:

El contenido de este ítem, al igual que el precedente, es de Semejanza de figuras planas de segundo año de Enseñanza Media. En él debe reconocer los criterios de semejanza de triángulos y aplicarlos a la figura dada. Además, el estudiante debe recordar de la Enseñanza Básica, que los ángulos correspondientes entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal tienen igual medida.

Si $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$, se tienen las igualdades $\measuredangle$ OAB = $\measuredangle$ OCD y $\measuredangle$ OBA = $\measuredangle$ ODC, por ser ángulos correspondientes entre paralelas. Además, $\measuredangle$ DOC es común para los triángulos OAB y OCD.

Utilizando las conclusiones del párrafo anterior, se analizarán las afirmaciones I), II) y III) del enunciado para determinar su veracidad.

En **I)** se afirma que los triángulos OAB y OCD son rectángulos. Tal afirmación **es falsa**, pues con los datos que entrega el problema no se puede concluir que estos triángulos tengan un ángulo de 90°, aunque pudiese haber un caso particular en que esto ocurriese,

En **II)** se afirma que los triángulos OAB y OCD son semejantes, esta afirmación **es verdadera** por el criterio AA., ya que $\measuredangle$ OAB = $\measuredangle$ OCD y $\measuredangle$ DOC es común a ambos triángulos, como se indicó anteriormente.

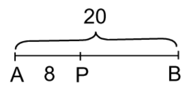
La afirmación **III) es falsa**, porque al aplicar correctamente la semejanza de trazos, se tiene que $\frac{CD}{AB} = \frac{OC}{OA}$, como CD = 2AB, reemplazando se obtiene que $\frac{2AB}{AB} = \frac{OC}{OA}$, de lo que se concluye que $\overline{OC} = 2 \cdot \overline{OA}$ y no $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{OA}$.

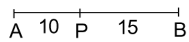
Por lo tanto, la opción correcta es B).

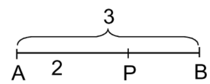
La pregunta resultó difícil, la contestó bien la tercera parte de los alumnos que la abordaron y la omisión no fue baja, alcanzando a un 22,4%. El distractor más elegido con un 24,6%, fue D), lo que indica que los estudiantes que marcaron este distractor no supieron establecer las relaciones correctas entre los lados proporcionales de los dos triángulos que eran semejantes.

Los datos cuantitativos nos demuestran que el contenido de semejanza de figuras planas, tema relevante en la enseñanza de la Geometría, no es un tópico dominado por los alumnos de la Enseñanza Media.

46. ¿Cuál(es) de los siguientes segmentos AB está(n) dividido(s) por el punto P en la razón 2 : 3 ?

I)


II)


III)


A) Sólo III
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

Comentario:

Esta pregunta corresponde a un contenido de segundo Año de Enseñanza Media, referido a la división interior de un trazo en una razón dada.

“Un punto P divide interiormente al segmento AB en la razón m : n, si se cumple que AP : PB = m : n”.

En este caso, el alumno debe reconocer en cuál de las afirmaciones se cumple que AP : PB = 2 : 3.

Como en I) PB = 12, el segmento AB, queda divido interiormente en la razón 8 : 12 = 2 : 3, lo que indica que **I) es verdadera**.

En II) la división es 10 : 15 = 2 : 3, por lo que **II) es verdadera**.

La afirmación **III) es falsa**, porque como el segmento AB = 3, éste quedaría dividido en la razón 2 : 1.

Por lo tanto, la opción correcta es B).

Sorprende que siendo una pregunta simple, directa y que sólo requiere del reconocimiento del concepto de división interior de trazos, resultara que solamente el 39% de los alumnos que la abordó la respondió correctamente, y que la omisión fuese bastante alta, de un 37,3%. El distractor más elegido por los alumnos fue A), esto se debe, lo más probable, a que sólo se fijaron en las cantidades que se mostraban en la afirmación, existiendo un desconocimiento absoluto del contenido al que apuntaba el ítem.

47. En el triángulo ABC de la figura 10, $\overline{PM} \parallel \overline{AB}$. Si PM = 10, AB = 15 y CT = 12, entonces ¿en cuál de las opciones se presenta la proporción correcta para determinar el valor de **x** ?

A) $\frac{10}{15} = \frac{12 - x}{12}$

B) $\frac{10}{15} = \frac{12 - x}{x}$

C) $\frac{10}{15} = \frac{x - 12}{12}$

D) $\frac{10}{15} = \frac{12}{12 - x}$

E) $\frac{10}{15} = \frac{12}{x}$

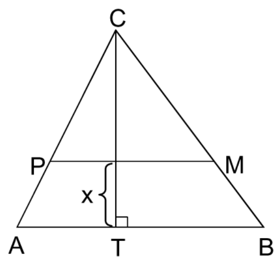


fig. 10

Comentario:

El ítem apunta al contenido de planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales en el triángulo, contenido de segundo año medio.

Como se tiene que $\overline{PM} \parallel \overline{AB}$, entonces por criterio de semejanza se concluye que Δ PMC ~ Δ ABC, de lo que se deduce que todos los trazos respectivos de los triángulos semejantes son proporcionales.

Así, en el Δ PMC la altura desde el vértice C es igual a $(12 - x)$, pues CT = 12.

Luego aplicando la proporcionalidad de los trazos respectivos, se tiene:

$$\frac{PM}{AB} = \frac{12 - x}{12}$$

así, $$\frac{10}{15} = \frac{12 - x}{12}.$$

Por lo que la opción correcta es A).

Este ítem resultó muy difícil, contestando acertadamente sólo el 17,8% de los alumnos que abordaron el problema. Tuvo una omisión bastante alta, cercana al 57%. Con estos datos estadísticos se concluye que los postulantes no manejan bien el contenido, o simplemente lo desconocen.

El distractor más elegido por los postulantes fue E), aquí plantean la siguiente proporción en forma errada $\frac{PM}{AB} = \frac{CT}{x}$, es decir $\frac{10}{15} = \frac{12}{x}$.

48. Una torre de dos pisos proyecta una sombra de 20 m; si el primer piso tiene una altura de 15 m y el segundo piso una altura de 10 m, ¿cuánto mide la sombra proyectada por el segundo piso ?

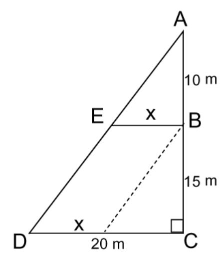
A) 8 m
B) 10 m
C) 15 m
D) $\frac{40}{3}$ m
E) No se puede determinar.

Comentario:

Este es un ítem contextualizado en donde el alumno debe aplicar el contenido de segundo año de Enseñanza Media referido al teorema de Thales aplicado a triángulos.

Para resolver este problema, es necesario comprender la información dada para luego representarla en una figura y así poder aplicar el contenido específico mencionado anteriormente.

En efecto, si representamos los datos en la siguiente figura, se tiene que:



DC es la medida de la sombra del edificio, BC corresponde a la altura del primer piso, AB es la medida del segundo piso y **x** corresponde a la medida de la sombra proyectada por el segundo piso. Aplicando el teorema de Thales, tenemos la siguiente proporción $\frac{25}{20} = \frac{10}{x}$, obteniéndose que $x = 8$ m. Lo que corresponde a la opción A).

Este problema obtuvo solamente el 28,2% de respuestas correctas de los postulantes que abordaron la pregunta y un 36,5% de omisión, de lo que se concluye que fue un ítem muy difícil, a pesar de ser un contenido básico de proporción de trazos en triángulos semejantes. El distractor E) fue el más elegido por los alumnos teniendo un 14,5%, lo que índica que no supieron interpretar los datos y transcribirlos a una proporción, o no supieron el contenido que debían utilizar para resolverlo.

49. El triángulo ABC de la figura 11 tiene sus vértices ubicados en las coordenadas A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) y C = (0, 0, 1). Su área y su perímetro miden, respectivamente.

A) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$
B) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$
C) $\sqrt{3}$ y $3\sqrt{2}$
D) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ y $3\sqrt{2}$
E) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$

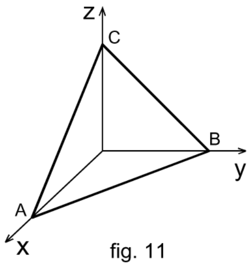


fig. 11

Comentario:

Este ítem está referido al contenido de planos en el espacio, determinado por tres puntos no colineales, tratados en cuarto año de Enseñanza Media.

Para su resolución, el alumno debe recordar las fórmulas de área y perímetro de triángulos y, además, el teorema de Pitágoras vistos en la Enseñanza Básica.

Para calcular el perímetro del triángulo ABC se deben encontrar las medidas de sus lados, y para ello se aplica el teorema de Pitágoras en el Δ AOC, en el Δ BOC y en el Δ OAB, todos rectángulos isósceles de catetos iguales a 1, donde O es el origen de los ejes coordenados.

Así, obtenemos que BC = AC = AB = $\sqrt{2}$. Luego Δ ABC es equilátero, y por lo tanto su perímetro es $3\sqrt{2}$.

Como la altura de un triángulo equilátero es $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ donde **a** es el valor del lado, se tiene que la altura del triángulo ABC es $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$.

Luego, el área es $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Por lo tanto, el área y perímetro del Δ ABC son $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $3\sqrt{2}$, respectivamente, lo que corresponde a la opción D).

Este ítem resultó muy difícil, con una omisión del 81,5% y sólo lo contestó correctamente el 9% de los postulantes, el resto, es decir el 9,5%, se repartió equitativamente entre los demás distractores.

Todo lo anterior indica que los estudiantes no saben ubicar coordenadas en el espacio, o no reconocieron que los triángulos AOC, BOC y OAB eran rectángulos isósceles donde podían aplicar el teorema de Pitágoras, o simplemente no recordaban cómo calcular el perímetro o el área de un triángulo equilátero.

50. En la circunferencia de centro O de la figura 12, el ángulo OCB mide 24°. ¿Cuál es la medida del ángulo AOC ?

A) 12°
B) 24°
C) 48°
D) 132°
E) 156°

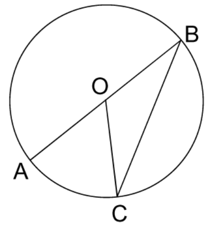


fig. 12

Comentario:

Este es un ítem que involucra el contenido tratado en segundo año de Enseñanza Media sobre ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia.

Para resolverlo correctamente el alumno debe recordar que un triángulo isósceles tiene ángulos basales iguales (contenido tratado en Enseñanza Básica) y aplicarlo en el problema.

Así, en la figura el Δ COB es isósceles de base CB y lados OC = OB = r (radio), por lo tanto ∢ OCB = ∢ OBC = 24º. Como ∢ OBC y ∢ AOC subtienden el mismo arco, se aplica la propiedad que dice: “En una circunferencia, el ángulo del centro mide el doble del ángulo inscrito que subtiende el mismo arco”, por lo tanto el ángulo AOC mide 48º, lo que corresponde a la opción C).

También, se puede resolver el ítem considerando que ∢ AOC es un ángulo exterior del triángulo BOC, y por lo tanto se cumple que:

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle OCB + \sphericalangle OBC$$

es decir, $\sphericalangle AOC = 24° + 24° = 48°$

El análisis estadístico de este problema nos indica que resultó relativamente difícil, lo contestó correctamente el 38,2% de los alumnos que lo abordaron, y tuvo una omisión cercana al 36%.

El distractor más elegido por los postulantes fue E), el error que comete el alumno es el siguiente: no lee bien el enunciado y toma al ángulo BOC igual a 24º, y luego utiliza ángulos suplementarios llegando a la conclusión que el ángulo AOC pedido es 156º.

51. En la circunferencia de radio 6 y centro O de la figura 13, $\overline{MP} \cong \overline{OP}$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) ?

I) $MQ = 6$
II) $PQ = 3\sqrt{3}$
III) $QN = 6\sqrt{3}$

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

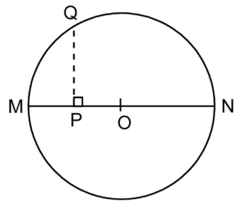


fig. 13

Comentario:

El contenido que involucra esta pregunta combinada es el Teorema de Euclides relativo a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo tema que corresponde al tercer año de Enseñanza Media.

Para resolver el ítem correctamente, el alumno debe analizar cada una de las afirmaciones dadas para determinar el valor de verdad de ellas. Para ello, debe recordar el teorema de Pitágoras tratado en Enseñanza Básica y que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto, tópico que se trabaja en segundo año de la Enseñanza Media.

Así, el ángulo MQN es de 90º, ya que está inscrito en una semicircunferencia, luego el Δ MQN es rectángulo en Q, con QP altura. Como el radio es 6, tenemos que MP = PO = 3 y PN = 9, luego aplicando el teorema de Euclides se tiene que $MP \cdot PN = QP^2$, reemplazando por los valores dados resulta que $3 \cdot 9 = QP^2$, multiplicando, aplicando raíz cuadrada y descomponiendo, se obtiene $QP = 3\sqrt{3}$, por lo que **II) es verdadera**.

Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo MPQ, sabiendo que MP = 3 y $QP = 3\sqrt{3}$ se tiene que MQ = 6, lo que indica que **I) es verdadera**.

Y para verificar III), también aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo QPN de catetos PN = 9 y $QP = 3\sqrt{3}$, obteniendo que $QN = 6\sqrt{3}$, por lo tanto **III) es verdadera**.

Lo que indica que la opción correcta es E).

Este ítem resultó muy difícil, con una omisión del 67,5% y sólo contestan correctamente el 14,1% de los postulantes, lo que indicaría que el alumno no supo como abordarlo, pues en este caso era necesario dibujar líneas anexas ($\overline{MQ}$ y $\overline{QN}$), reconocer que el triángulo que se formaba era rectángulo y que en él se podía aplicar el teorema de Euclides.

El resto de los postulantes, se repartió en forma equitativa entre los demás distractores.

52. Con los datos de la figura 14, la expresión **sen α – cos α** es igual a

A) $\frac{a - c}{b}$
B) $\frac{c - a}{b}$
C) $\frac{a - b}{c}$
D) $\frac{b - a}{c}$
E) $\frac{ac - ab}{bc}$

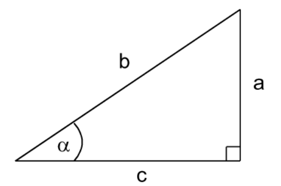


fig. 14

Comentario:

Para resolver este problema, el alumno debe ser capaz de aplicar las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo, contenido tratado en tercer año de la Enseñanza Media.

Como debe calcular **sen α – cos α**, debe recordar que:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \ \text{y} \ \cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}},$$

luego, reemplazando por los valores literales del triángulo rectángulo de la figura se tiene $\text{sen}\ \alpha = \frac{a}{b}$ y $\cos\alpha = \frac{c}{b}$, obteniendo la siguiente igualdad $\textbf{sen}\ \alpha - \textbf{cos}\ \alpha = \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$.

Por lo tanto, la opción correcta es A).

Este ítem resultó difícil con una omisión superior al 50% y lo contestó correctamente el 35% de los postulantes que abordaron la pregunta. Llama la atención su alta omisión puesto que se trata de un proceso rutinario dentro del tema tratado, lo que implicaría que este contenido es desconocido para una gran cantidad de los postulantes.

El distractor más elegido fue B), en este caso confunden las razones trigonométricas, es decir para ellos:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b} \ \text{y} \ \cos\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b},$$

reemplazando en $\textbf{sen}\ \alpha - \textbf{cos}\ \alpha = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} = \frac{c - a}{b}$.

53. En la figura 15, una persona ubicada en lo alto del edificio P de 12 m de altura, observa a otra persona, de igual tamaño, en lo alto del edificio Q de 18 m de altura con un ángulo de elevación de 40°. ¿Cuál es la distancia (d) entre los dos edificios ?

A) $6 \text{ tg } 40°$
B) $\dfrac{6}{\text{tg } 40°}$
C) $\dfrac{6}{\text{sen } 40°}$
D) $\dfrac{6}{\cos 40°}$
E) $6 \text{ sen } 40°$

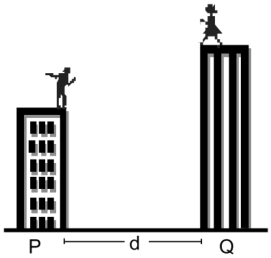
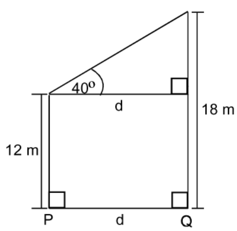


fig. 15

Comentario:

Este ítem apunta a un contenido de tercer año medio, donde el postulante debe aplicar las razones trigonométricas en la resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles.

Lo primero, es ordenar los datos que el enunciado entrega, lo que se puede ver a través de la siguiente figura:



Podemos visualizar que el dibujo queda dividido en dos figuras elementales, un rectángulo de lados 12 m y d, y un triángulo rectángulo cuyos catetos son d y 6 m, por lo tanto, basta con trabajar con el triángulo rectángulo para calcular d. Para esto, aplicamos la razón trigonométrica de la tangente.

Así, se tiene que $\text{tg } 40° = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{6}{d}$, despejando se obtiene $d = \dfrac{6}{\text{tg } 40°}$, lo que corresponde a la opción B).

Este ítem resultó ser un problema muy difícil de resolver, con sólo el 17% de respuestas correctas y con una omisión cercana al 70%, lo que indicaría que es un contenido que aún no es asimilado por los estudiantes de la Enseñanza Media.

Los distractores con mayor preferencia por los postulantes fueron A) y C), en donde, en el primer caso, escribe mal la proporción y, en el segundo caso, confunde la razón trigonométrica necesaria para resolver el problema.

54. Se desea forrar una caja cúbica de arista **a**. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa la superficie a cubrir ?

A) $12a^2$
B) $6a^2$
C) a^2
D) $4a^2$
E) $8a^2$

Comentario:

El alumno debe dominar la resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, contenido tratado en cuarto año de la Enseñanza Media. Además, debe recordar de la Enseñanza Básica como calcular el área de un cuadrado.

Para resolverlo, el estudiante debe tener claro que un cubo tiene seis caras cuadradas y que su área total es seis veces el área de una cara. En este caso, como la arista es **a**, el área de una cara es $\mathbf{a^2}$, por lo tanto el total de superficie a forrar es $\mathbf{6a^2}$, lo que corresponde a la opción B).

A pesar de ser un ítem de desarrollo sencillo e inmediato, tuvo una alta omisión, cercana al 36%. La pregunta resultó difícil, ya que sólo un 38% la contestó correctamente, lo que lleva a deducir que no es un tipo de problema que se trabaje en forma habitual en el aula.

La alternativa E) fue el distractor más abordado, lo más probable es que el alumno confundió el número total de caras de un cubo, con el número total de vértices que éste tiene.

ATENCIÓN BECADOS JUNAEB PROMOCIONES ANTERIORES:

CAMBIO DE CLAVE: 16 de Agosto
El DEMRE, a partir del miércoles 16 de agosto, cambiará el número de Folio a todos los Postulantes de Promociones Anteriores beneficiados con la Beca JUNAEB.
Para conocer la nueva clave, el postulante deberá llamar a contar de esa fecha a la mesa de Ayuda, teléfono (56-2) 978 3806.

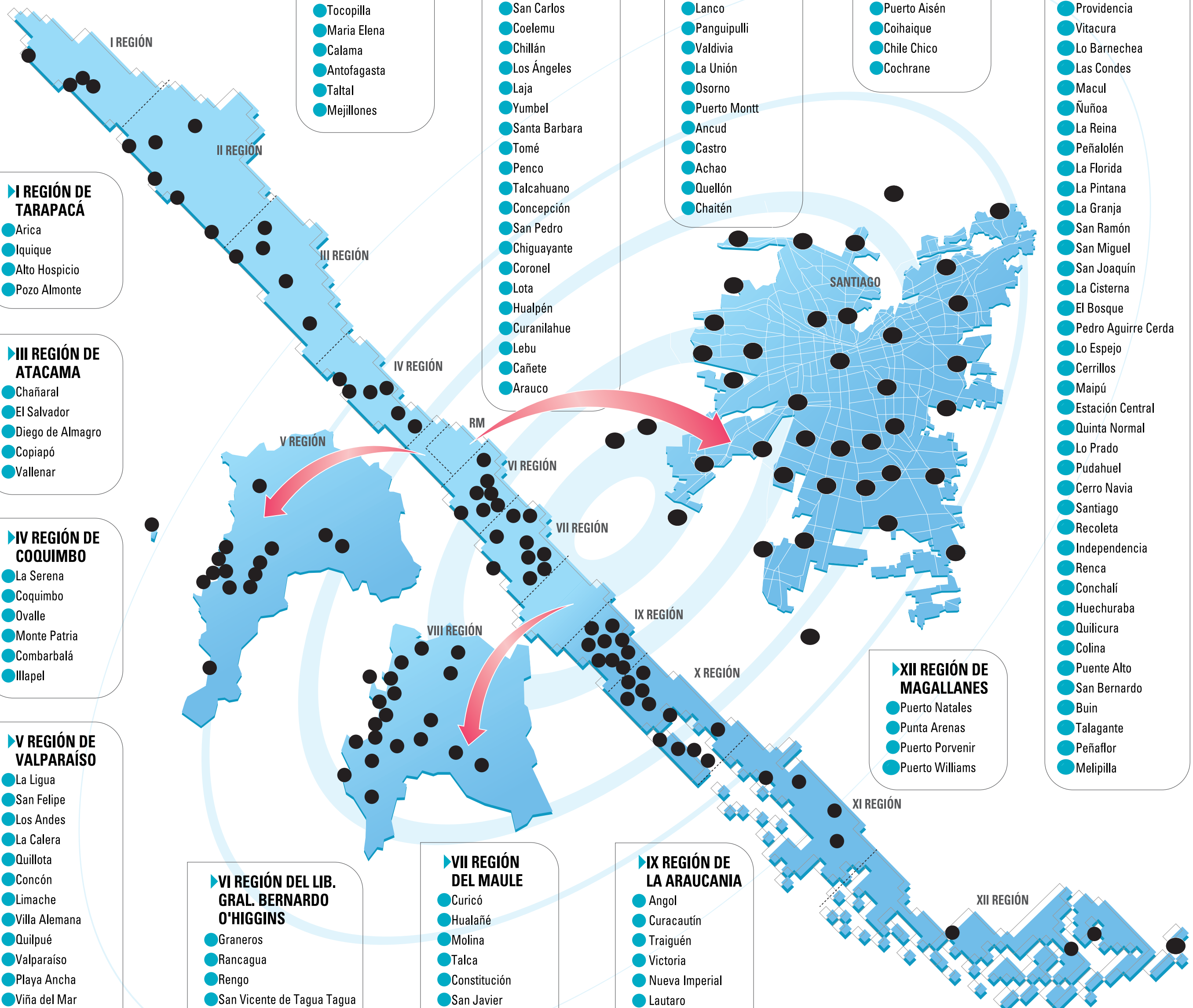
ENTREGA DE MODELOS DE PRUEBAS

Los postulantes inscritos de promociones anteriores podrán retirar los modelos de pruebas de Lenguaje y Comunicación y de Matemática en la Secretaría de Admisión respectiva, previa presentación de la Tarjeta de Identificación, a contar de las siguientes fechas:

- 16 de Agosto para regiones
- 04 de Septiembre para Región Metropolitana

Los postulantes inscritos de la promoción del año recibirán los modelos de prueba por intermedio de su respectivo establecimiento educacional.

Sedes de Rendición de Pruebas



I REGIÓN DE TARAPACÁ
- Arica
- Iquique
- Alto Hospicio
- Pozo Almonte

II REGIÓN DE ANTOFAGASTA
- Tocopilla
- Maria Elena
- Calama
- Antofagasta
- Taltal
- Mejillones

III REGIÓN DE ATACAMA
- Chañaral
- El Salvador
- Diego de Almagro
- Copiapó
- Vallenar

IV REGIÓN DE COQUIMBO
- La Serena
- Coquimbo
- Ovalle
- Monte Patria
- Combarbalá
- Illapel

V REGIÓN DE VALPARAÍSO
- La Ligua
- San Felipe
- Los Andes
- La Calera
- Quillota
- Concón
- Limache
- Villa Alemana
- Quilpué
- Valparaíso
- Playa Ancha
- Viña del Mar
- Recreo
- Isla de Pascua
- San Antonio

VI REGIÓN DEL LIB. GRAL. BERNARDO O'HIGGINS
- Graneros
- Rancagua
- Rengo
- San Vicente de Tagua Tagua
- San Fernando
- Santa Cruz
- Pichilemu

VII REGIÓN DEL MAULE
- Curicó
- Hualañé
- Molina
- Talca
- Constitución
- San Javier
- Linares
- Parral
- Cauquenes

VIII REGIÓN DEL BIOBIO
- San Carlos
- Coelemu
- Chillán
- Los Ángeles
- Laja
- Yumbel
- Santa Barbara
- Tomé
- Penco
- Talcahuano
- Concepción
- San Pedro
- Chiguayante
- Coronel
- Lota
- Hualpén
- Curanilahue
- Lebu
- Cañete
- Arauco

IX REGIÓN DE LA ARAUCANIA
- Angol
- Curacautín
- Traiguén
- Victoria
- Nueva Imperial
- Lautaro
- Temuco
- Pitrufquén
- Villarrica

X REGIÓN DE LOS LAGOS
- Lanco
- Panguipulli
- Valdivia
- La Unión
- Osorno
- Puerto Montt
- Ancud
- Castro
- Achao
- Quellón
- Chaitén

XI REGIÓN DE AISÉN
- Puerto Aisén
- Coihaique
- Chile Chico
- Cochrane

XII REGIÓN DE MAGALLANES
- Puerto Natales
- Punta Arenas
- Puerto Porvenir
- Puerto Williams

REGIÓN METROPOLITANA
- Providencia
- Vitacura
- Lo Barnechea
- Las Condes
- Macul
- Ñuñoa
- La Reina
- Peñalolén
- La Florida
- La Pintana
- La Granja
- San Ramón
- San Miguel
- San Joaquín
- La Cisterna
- El Bosque
- Pedro Aguirre Cerda
- Lo Espejo
- Cerrillos
- Maipú
- Estación Central
- Quinta Normal
- Lo Prado
- Pudahuel
- Cerro Navia
- Santiago
- Recoleta
- Independencia
- Renca
- Conchalí
- Huechuraba
- Quilicura
- Colina
- Puente Alto
- San Bernardo
- Buin
- Talagante
- Peñaflor
- Melipilla